

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ**

д.т.н. И. Д. Евзеров

**Аннотация**

Рассматриваются геометрически нелинейные задачи в трехмерной вариационной постановке и шаговый метод для их решения. Выполнен переход к соответствующим задачам для стержней и пластин. Рассмотрены также геометрически нелинейные динамические задачи и разностная схема. Предложен следующий алгоритм решения геометрически нелинейных задач после потери устойчивости. Сначала применяется шаговый метод. Если после некоторого шага установлено, что произошла потеря устойчивости, далее решается соответствующая динамическая задача при равной нулю правой части. Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Применяется безусловно устойчивая неявная разностная схема. Таким методом находим устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. Далее снова применяется шаговый метод. Приведены тестовые задачи для шарнирно-стержневых систем, круговой арки и центрально сжатой консоли, подтверждающие эффективность алгоритма.

**Комментарий автора**

В представленной работе содержится математическое обоснование применяемых в ПК ЛИРА 10 методов решения геометрически нелинейных задач. Теория устойчивости стержней обсуждалась с д.т.н., профессором Сливкером В.И. и совпадает с полученными другими методами результатами монографии Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. - М.: СКАД СОФТ, 2009.

**Оглавление**

Аннотация .....	1
Комментарий автора .....	1
Оглавление .....	1
Введение .....	2
Обозначения .....	2
Статическая задача и шаговый метод .....	2
Динамическая задача и разностная схема .....	4
Расчет после потери устойчивости .....	5
Решение тестовых задач .....	5
Шарнирно-стержневая система 1 .....	5
Шарнирно-стержневая система 2 .....	6
Шарнирно-стержневая система 3 .....	6
Шарнирно-стержневая система 4 .....	7
Большие перемещения и потеря устойчивости защемленной круговой арки .....	8
Изгиб консоли после потери устойчивости .....	8
Выводы .....	9
Литература .....	9

## Введение

Для трехмерной геометрически нелинейной задачи приведены уравнения равновесия и шагового метода, разностная схема для динамической задачи. Выполнен переход к стержням и пластинам. Предложен новый алгоритм решения геометрически нелинейных задач. После потери устойчивости решается соответствующая динамическая задача при равной нулю правой части, что дает возможность найти устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Применяется безусловно устойчивая неявная разностная схема. Предложенный алгоритм реализован в ПК ЛИРА 10. Приведены также тестовые задачи, подтверждающие эффективность алгоритма.

## Обозначения

$\Omega$  – область, занимаемая конструкцией,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – вектор независимых переменных,

$\rho$  – плотность,  $A, l$  – сечение и длина стержня,  $\delta$  – толщина пластины,

$U(x)$  – 3D перемещения,  $U = (U_1, U_2, U_3)$ ,  $f$  – правая часть,  $f = (f_1, f_2, f_3)$ ,

$e_{ij}(U) = (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i + \partial U_k / \partial x_i \partial U_k / \partial x_j) / 2$  - деформации,

$\sigma_{ij}(U) = E \varepsilon_{ij}(U)$  - закон Гука,

$d^1, d^2$  – первая и вторая вариации,  $V, W$  - возможные перемещения,

$d^1 e_{ij}(U)V = (\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i + \partial U_k / \partial x_i \partial V_k / \partial x_j + \partial V_k / \partial x_i \partial U_k / \partial x_j) / 2$ ,

$d^2 e_{ij}(V, W) = (\partial V_k / \partial x_i \partial W_k / \partial x_j + \partial W_k / \partial x_i \partial V_k / \partial x_j) / 2$ ,

$u, \alpha$  – перемещения и повороты стержня или пластины,  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,

для стержней  $\alpha_2 = -u_3'$ ,  $\alpha_3 = u_2'$ ,

для пластин  $\alpha_1 = \partial u_3 / \partial x_2$ ,  $\alpha_2 = -\partial u_3 / \partial x_1$ ,  $\alpha_3 = (\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2) / 2$ ,

$N_i, M_i, N_{pq}, M_{pq}, i = 1, 2, 3, p, q = 1, 2$  - внутренние силы и моменты для стержней и пластин.

## Статическая задача и шаговый метод

Уравнения равновесия формулируем в виде принципа возможных перемещений:

$$a(U, V) + (f, V) = 0, \text{ где-} \quad (1)$$

$$a(U, V) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U) d^1 e_{ij}(U) V dx, \quad (f, V) = \int_{\Omega} f_i V_i dx -$$

возможные работы внутренних и внешних сил.

Для построения уравнений шагового метода предполагаем, что правая часть линейно зависит от параметра  $\theta, 0 \leq \theta \leq 1$ . Дифференцируя (1) по  $\theta$ , получим

$$a'(U, U', V) + (f, V) = 0, \text{ где-} \quad (2)$$

$$a'(U, V, W) = a'_E(U, V, W) + a'_\sigma(U, V, W),$$

$$a'_E(U, V, W) = \int_{\Omega} E d^1 \varepsilon_{ij}(U) V d^1 e_{ij}(U) W dx, \dots a'_\sigma(U, V, W) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} d^2 e_{ij}(V, W) dx.$$

Заменив в (2) производную  $U'$  разностным отношением, получим известные уравнения шагового метода

$$a'(U_n, U_{n+1} - U_n, V) = (\theta_{n+1} - \theta_n)(f, V),$$

$$\text{где } U_0 = 0, m = 1, \dots, m_0, \theta = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m_0} = 1.$$

Используется автоматический выбор шагов  $\theta_{n+1} - \theta_n$ . Критерием является изменение геометрии.

Функционал  $a'_E(U, V, W)$  положительно определен и аналогичен функционалу возможной работы внутренних сил соответствующей линейной задачи.

Функционал  $a'_\sigma(U, V, W)$  зависит от напряжений и не является положительно определенным, поэтому шаговый метод позволяет исследовать устойчивость деформированной схемы.

Наиболее интересными являются геометрически нелинейные задачи для стержней и пластин. Далее получим представление функционала  $a'_\sigma(U, V, W)$  для этих задач.

**Функционал  $a'_\sigma(U, V, W)$**

Для **стержней** используется представление перемещений по сечению[1]:

$$\begin{aligned} U_1(x) &= u_1 - x_2\alpha_3 + x_3\alpha_2 + (x_2\alpha_1\alpha_2 + x_3\alpha_1\alpha_3)/2, \\ U_2(x) &= u_2 - x_3\alpha_1 - x_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2)/2 + x_3\alpha_2\alpha_3/2, \\ U_3(x) &= u_3 + x_2\alpha_1 + x_2\alpha_2\alpha_3/2 - x_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2. \end{aligned} \quad (3)$$

Дифференцируя (3), находим вторые вариации деформаций:

$$\begin{aligned} d^2e_{11}(U) &= [(\alpha_3 - x_3\alpha_1')^2 + (-\alpha_2 + x_2\alpha_1')^2 + x_2(\alpha_1\alpha_2)' + x_3(\alpha_1\alpha_3)']/2, \\ d^2e_{12}(U) &= [-x_3(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) - \alpha_1\alpha_2]/2, \\ d^2e_{13}(U) &= [x_2(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) - \alpha_1\alpha_3]/2, \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрируя по сечению, получим

$$\begin{aligned} a'_\sigma(U, V, V) &= \int_l [N_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + M_1(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) \\ &- 2(M_2\alpha_1)'\alpha_3 + 2(M_3\alpha_1)'\alpha_2 + (M_2\alpha_1\alpha_3)' - (M_3\alpha_1\alpha_2)'] \\ &+ (N_1r^2 + M_2I_{32} - M_3I_{23})\alpha_1^2] dx_1 / 2 \end{aligned} \quad (5)$$

где  $r^2 = (I_2 + I_3)/A$ ,  $I_2 = \int_A x_3^2 dA$   $I_3 = \int_A x_2^2 dA$ ,

$$I_{32} = \int_A x_3(x_2^2 + x_3^2) dA / I_2, \quad I_{23} = \int_A x_2(x_2^2 + x_3^2) dA / I_3.$$

Для тонкостенных стержней полагаем

$$\alpha_2 = -u_3' + x_2^0\alpha_1', \alpha_3 = u_2' + x_3^0\alpha_1', \quad x_2^0, x_3^0 - \text{координаты центра кручения.}$$

Первое слагаемое в (5) – изгиб от сжатия, второе – изгиб от кручения, последнее – кручение от сжатия, третье – кручение от изгиба.

Функционал (5) другими методами получен в [3,7].

Для **пластин** используется представление перемещений по толщине[1]:

$$\begin{aligned} U_1(x) &= u_1 + x_3\alpha_2 + x_3\alpha_1\alpha_3/2, \\ U_2(x) &= u_2 - x_3\alpha_1 + x_3\alpha_2\alpha_3/2, \\ U_3(x) &= u_3 - x_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференцируя (6), находим вторые вариации деформаций:

$$\begin{aligned} d^2e_{11}(U) &= [(\partial u_2 / \partial x_1 - x_3\partial\alpha_1 / \partial x_1)^2 + \alpha_2^2 + x_3\partial(\alpha_1\alpha_3) / \partial x_1] / 2, \\ d^2e_{22}(U) &= [(\partial u_1 / \partial x_2 + x_3\partial\alpha_2 / \partial x_2)^2 + \alpha_1^2 + x_3\partial(\alpha_2\alpha_3) / \partial x_2] / 2, \\ d^2e_{12}(U) &= [(\partial u_1 / \partial x_1 + x_3\partial\alpha_2 / \partial x_1)(\partial u_1 / \partial x_2 + x_3\partial\alpha_2 / \partial x_2) + \\ &(\partial u_2 / \partial x_1 - x_3\partial\alpha_1 / \partial x_1)(\partial u_2 / \partial x_2 - x_3\partial\alpha_1 / \partial x_2) + \alpha_1\alpha_2 + x_3(\partial(\alpha_1\alpha_3) / \partial x_2 + \partial(\alpha_2\alpha_3) / \partial x_1)] / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 e_{13}(U) &= -\alpha_1 \partial u_2 / \partial x_1 + \alpha_1 \alpha_3 / 2, \\ d^2 e_{23}(U) &= \alpha_2 \partial u_1 / \partial x_2 + \alpha_2 \alpha_3 / 2 \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрируя по толщине, получим

$$\begin{aligned} a'_\sigma(U, V, V) &= \int_{\Omega} [N_{pq} \partial u_3 / \partial x_p \partial u_3 / \partial x_q + \\ &N_{11} (\partial u_2 / \partial x_1)^2 + N_{22} (\partial u_1 / \partial x_2)^2 + N_{12} (\partial u_1 / \partial x_1 \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 \partial u_2 / \partial x_2) \\ &+ 2\partial(M_{1p} \alpha_1) / \partial x_p \partial u_2 / \partial x_1 - 2\partial(M_{2p} \alpha_2) / \partial x_p \partial u_1 / \partial x_2 - \partial(M_{pq} \alpha_p \alpha_3) / \partial x_q] dx_1 dx_2 / 2 \end{aligned} \quad (8)$$

Первая сумма в (8) - изгиб от сжатия, три последние – влияние изгиба.

Слагаемые

$$N_{11} (\partial u_2 / \partial x_1)^2 + N_{22} (\partial u_1 / \partial x_2)^2 + N_{12} (\partial u_1 / \partial x_1 \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 \partial u_2 / \partial x_2)$$

также существенны. Например, задачи устойчивости центрально сжатых стержней с сечениями – Пи, двугавр, Зет и т.д., можно моделировать и пластинами. Если в (8) не учитывать указанные слагаемые, критическая сила увеличивается на 30 – 50%

При использовании метода разложения по малому параметру (толщине) эти слагаемые приняты малыми.

### Динамическая задача и разностная схема

В уравнение равновесия (1) добавляется инерционное слагаемое

$$b(U'', V) + a(U, V) + (f, V) = 0 \quad (9)$$

и начальные условия

$$U(0) = U^0, \quad U'(0) = U^1 \quad (10)$$

$$b(U, V) = \int_{\Omega} \rho U_i V_i dx$$

где  $\int_{\Omega} \rho U_i V_i dx$  - возможная работа инерционных сил.

Для исследования уравнения и построения разностной схемы запишем (9) в виде[2]:

$$b(U'', V) + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U) d^1 e_{ij}(U) V dx + (f, V) = 0 \quad (11)$$

$$E^{-1} \sigma'_{ij}(U) - d^1 e_{ij}(U) U' = 0 \quad (12)$$

В (11) положим  $V = U'$ , (12) умножим на  $\sigma_{ij}$ , проинтегрируем по  $\Omega$  и сложим с (11). Получим известное уравнение энергетического баланса:

$$d/dt (b(U', U') + \int_{\Omega} E^{-1} \sigma_{ij}(U) \sigma_{ij}(U) dx) / 2 + (f, U') = 0$$

Из леммы Гронуолла методами [4,6]: доказываем существование, а затем и единственность решения.

Разностная схема строится из (11,12):

$$b(\gamma_n U, V) + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{n+1}) d^1 e_{ij}(U_n) V dx + (f_n, V) = 0 \quad (13)$$

$$E^{-1} (\sigma_{ij}(U_{n+1}) - \sigma_{ij}(U_n)) - d^1 e_{ij}(U_n) (U_{n+1} - U_n) = 0 \quad (14)$$

$$\gamma_n U = (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) \theta^{-2}, \quad U_n = U(t_n), \quad t_n = n\theta$$

Устойчивость и оценка погрешности доказываются так же, как существование решения.

Схему (13,14) можно применить и к статической задаче, задав правую часть в виде.

$$f(t) = \varepsilon t f, \quad 0 < t \leq 1/\varepsilon,$$

$$f(t) = f, \quad 1/\varepsilon < t \leq 2/\varepsilon.$$

### Расчет после потери устойчивости

Сначала применяется шаговый метод. Если после некоторого шага установлено, что произошла потеря устойчивости, для исследования дальнейшего поведения конструкции решается динамическая задача (9,10) при равной нулю правой части. Применяется схема (13,14). Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Таким методом находим устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. Далее снова применяется шаговый метод.

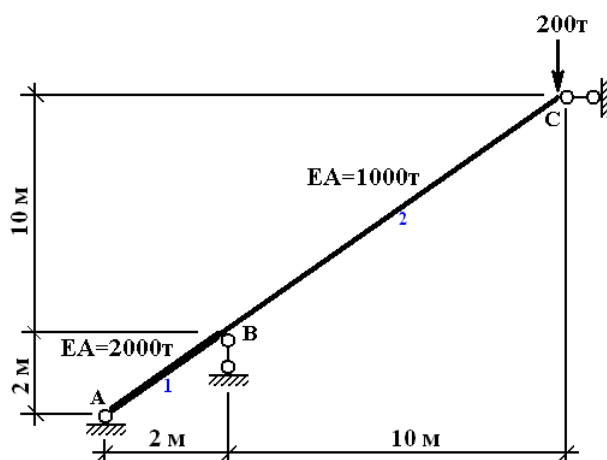
### Решение тестовых задач

Все расчеты выполнены в ПК ЛИРА 10, в котором реализован предложенный алгоритм.

#### Шарнирно-стержневая система 1

Аналитическое решение: [5,8].

Геометрия:



Граничные условия:  $u_A = v_A = v_B = u_C = 0$

Система моделировалась двумя конечными элементами нити (КЭ 310- нить).

Таблица 1. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	N1, т	174,34	173,47	0,4
	N2, т	239,86	239,80	0,05
В	$u_B$ , м	0,343	0,336	2,0
С	$v_C$ , м	-24,655	-24,633	0,1

Примечания: Конструкция дважды теряет устойчивость:

при нагрузке  $P = 74,88$  т, перемещения  $u_B = -0,510$  м,  $v_C = -4,460$  м. Устойчивое равновесное состояние – при  $u_B = -3,616$  м,  $v_C = -18,669$  м. ;

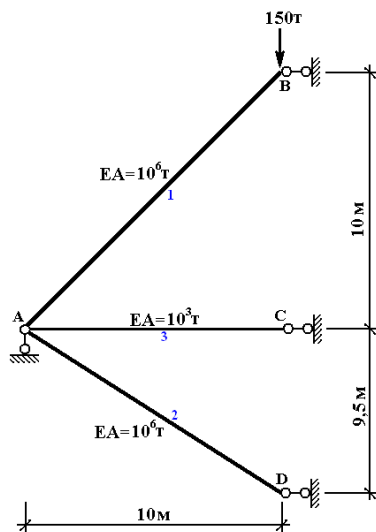
при нагрузке  $P = 180,0$  т, перемещения  $u_B = -2,962$  м,  $v_C = -22,223$  м. Устойчивое равновесное состояние – при  $u_B = 0,330$  м,  $v_C = -24,276$  м.

Переместив точку С на 20 м вниз, получаем систему, не теряющую устойчивость при заданной нагрузке, что позволяет легко проверить результаты расчета исходной системы.

### Шарнирно-стержневая система 2

Геометрия:

Аналитическое решение: [5].



Граничные условия:  $v_A = u_B = u_C = v_C = u_D = 0$ .

Система моделировалась тремя конечными элементами нити (КЭ 310- нить). Таблица 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

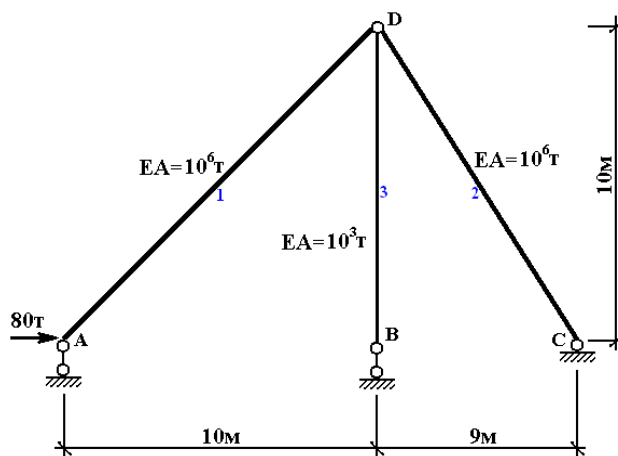
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	$N_1, \text{ т}$	-700,0	-693,0	1,0
	$N_2, \text{ т}$	300,0	296,0	1,0
	$N_3, \text{ т}$	380,0	380,16	0,05
D	$v_D, \text{ м}$	9,50	9,50	0,0
B	$v_B, \text{ м}$	-6,95	-6,947	0,05
A	$u_A, \text{ м}$	-3,80	-3,80	0,0

Примечание: Конструкция теряет устойчивость при нагрузке  $P=133,20 \text{ т}$ , перемещения  $u_A=-2,602\text{ м}$ ,  $v_B=-3,584\text{ м}$ ,  $v_D=3,884\text{ м}$ . Устойчивое равновесное состояние – при  $u_A=-3,80\text{ м}$ ,  $v_B=-6,937\text{ м}$ ,  $v_D=9,494\text{ м}$ ., нижний стержень горизонтален.

### Шарнирно-стержневая система 3

Геометрия:

Аналитическое решение: [5].



Граничные условия:  $u_C = v_A = v_B = v_C = 0$ ,  $u_B = u_D$ .

Система моделировалась тремя конечными элементами нити (КЭ 310- нить).

Таблица 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	N1, т	-112,21	-111,88	0,3
	N2, т	118,35	118,22	0,1
	N3, т	-8,0	-8,7	1,0
A	uA, м	18,024	18,017	0,05
B	uB, м	18,090	18,118	0,13
D	vD, м	-0,080	-0,087	1,0

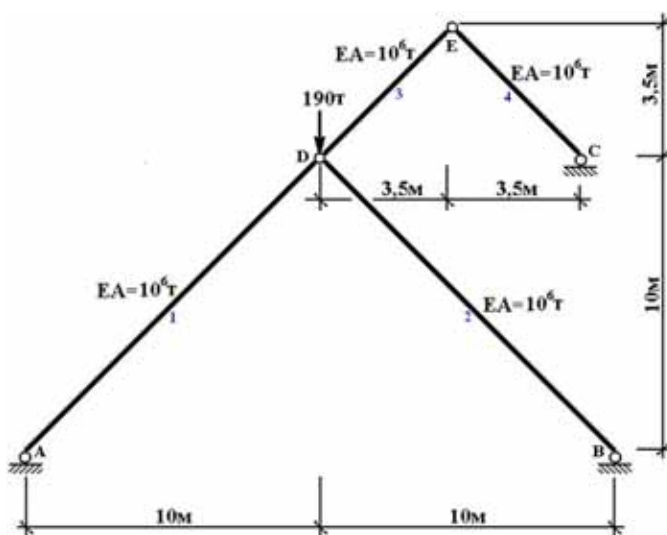
Примечания: Конструкция теряет устойчивость при нагрузке  $P=57,450\text{т}$ , перемещения  $u_A=6,665\text{м}$ ,  $u_B=3,602\text{м}$ ,  $v_D=2,324\text{м}$ . Устойчивое равновесное состояние – при  $u_A=18,013\text{м}$ ,  $u_B=18,085\text{м}$ ,  $v_D=-0,0663\text{м}$ .

Переместив точки A, B и D на 18 м вправо, получаем систему, не теряющую устойчивость при заданной нагрузке, что позволяет легко проверить результаты расчета исходной системы.

#### Шарнирно-стержневая система 4

Геометрия:

Аналитическое решение: [5].



Граничные условия:  $u_A = u_B = v_A = v_B = u_C = v_C = 0$ .

Система моделировалась четырьмя конечными элементами нити (КЭ 310-нить).

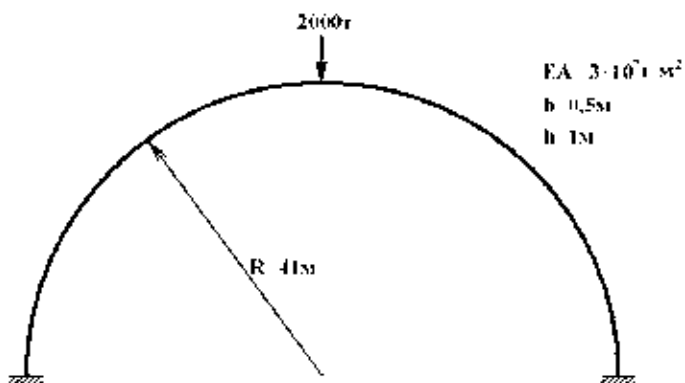
Таблица 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	N1, т	-245,0	-245,3	0,1
	N2, т	319,0	-318,9	0,1
	N3 =N4, т	116,0	115,89	0,1
D	uD, м	0,530	0,529	0,01
D	vD, м	-8,240	-8,241	0,01
E	uE, м	0,265	0,265	0,0
E	vE, м	-7,620	-7,624	0,05

Примечание: Конструкция теряет устойчивость при нагрузке  $P=187,63\text{т}$ . В устойчивом равновесном состоянии точка приложения нагрузки смещена вправо, два верхних стержня вытянуты в прямую линию. Точка D опускается ниже линии AB при нагрузке  $P=290\text{т}$ .

### Большие перемещения и потеря устойчивости защемленной круговой арки

Геометрия:



Характеристика материала:  $E\gamma = 1.25 \cdot 10^6 \text{ тм}^2$ .

Граничные условия: Точки А и В защемлены.

Применены стержневые конечные элементы сильного изгиба (КЭ 309), разбивка – 180 КЭ.

Таблица 5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

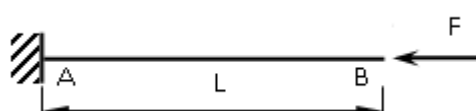
Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
$w_3, \text{ м}$	66.07	66,09	0,03

Примечание: Конструкция теряет устойчивость при нагрузке  $P=1950\text{т}$ , перемещение  $w_3=19,7\text{м}$ . Устойчивое равновесное состояние – при  $w_3=65,889\text{м}$ .

### Изгиб консоли после потери устойчивости

Аналитическое решение: [3], стр. 107.

Геометрия:



$L = 10 \text{ м};$   
 $A = 0.02 \text{ м}^2;$   
 $I = 2 \times 10^{-6} \text{ м}^4.$

Характеристика материала:  $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$ .

Граничные условия: Точка А защемлена.

Нагрузки:  $F = 1.1 \text{ т}$ .

Применены стержневые конечные элементы сильного изгиба (КЭ 309), разбивка – 100 КЭ.

Таблица 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
В	$u_B, \text{ м}$	-2,025	-2,024	0,5
В	$w_B, \text{ м}$	-5,361	-5,359	0,4

Примечание: Конструкция теряет устойчивость при нагрузке  $P=0,990\text{т}$ . Поскольку вертикальные перемещения отсутствуют, для продолжения расчета необходимо найти первую форму потери устойчивости Устойчивое равновесное состояние – при  $u_B=0,0616\text{м}$ ,  $v_B=-1,0\text{м}$ .



### **Выводы**

Рассмотрена вариационная постановка трехмерных геометрически нелинейных задач и соответствующих задач для стержней и пластин. Для решения статических задач рассмотрен шаговый метод, для динамических - разностная схема. Предложен новый алгоритм решения статических геометрически нелинейных задач – после потери устойчивости решается соответствующая динамическая задача при равной нулю правой части. Применяется безусловно устойчивая неявная разностная схема. Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Таким методом находим устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. В устойчивом состоянии применяется шаговый метод. Предложенный алгоритм реализован в ПК ЛИРА 10. Приведены тестовые задачи, подтверждающие эффективность алгоритма.

### **Литература**

1. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – К.: «Факт», 2007. – 394 с.
2. Евзеров И.Д. Приближенная схема для задачи о нелинейных колебаниях тонких пластин // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1989. –Т.3 (20). – №2. – С. 54–63.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.7. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
5. Назаров Д. Обзор современных программ конечно-элементного анализа // САПР и графика. – 2000. – № 2. – С. 52–55.
6. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
7. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. – М.: СКАД СОФТ, 2007. – 653 с.
8. Об использовании метода конечных элементов при решении геометрически нелинейных задач / Данилин А., Зуев Н., Снеговский Д., Шалашилин В. // САПР и графика. – 2000. – № 4. – С. 26–31.