



**ЛИРА**  
СОФТ

[lira-soft.com](http://lira-soft.com)  
+7 (499) 922-00-02

# Реализация конечных элементов с узлами на сторонах в ПК ЛИРА 10.4

**Евзеров И.Д.**

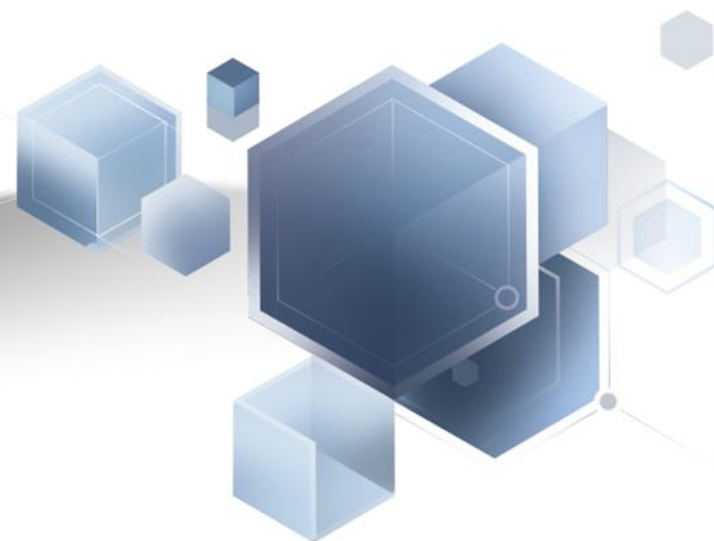
д.т.н., науч. руководитель проекта ЛИРА 10

**Колесников А.В.**

технический директор «ЛИРА софт»

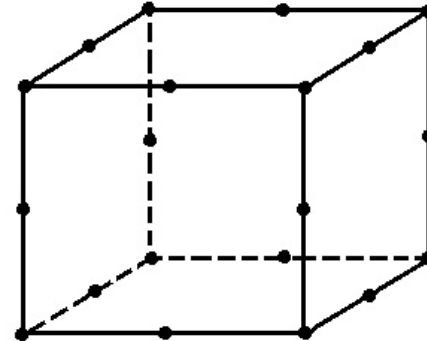
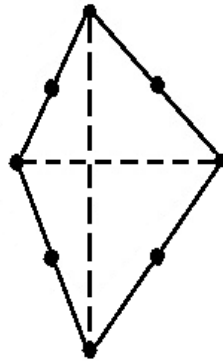
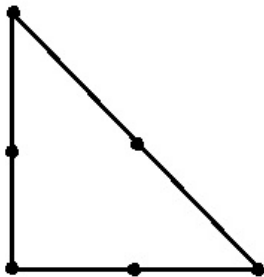
[lira@lira-soft.com](mailto:lira@lira-soft.com)

Москва  
2015



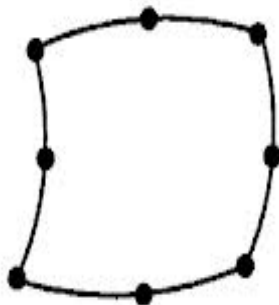
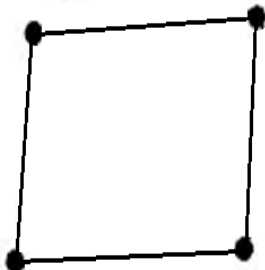
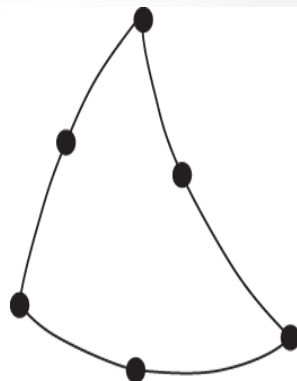
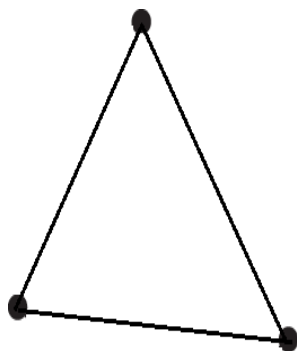
# Конечные элементы с узлами на серединах сторон

- Пластины: треугольник, четырехугольник.
- Объемные элементы: тетраэдр, треугольная и четырехугольная призмы.



Реализованы в версии ПК ЛИРА 10.4 R1

# конечные элементы с узлами на серединах сторон



Перед запуском на расчет пользователь может  
выбрать КЭ с доп. узлами

Параметры расчета

Основные

Тип расчет **Полный**

Оптимизация Автоматически выби

Точность разложения матрицы жесткости 1e-7

Точность решения динамической задачи 1e-5

Использовать многопроцессорный расчет

Использовать 6 степеней свободы в КЭ оболочки

Использовать конечные элементы с дополнительными узлами

При успешном расчете выполнять расчет конструкций

Запустить расчет

Переходить в результаты после успешного расчета

# Конечные элементы с узлами на серединах сторон

## Конечные элементы линейной статической задачи [1, 2, 3]

порядок производных  $m$ ;

область  $\Omega$ , занимаемую конечным элементом, и его узлы  $X_l$ ;

множество узловых неизвестных;

множество  $H_\mu$  линейных комбинаций базисных функций  $\mu_k$  или их явный вид.

Обозначим  $P_r(\Omega)$  - множество многочленов степени не выше  $r$  на  $\Omega$ ;

$Q_r(\Omega)$  - множество произведений многочленов степени не выше  $r$  по каждой переменной,

### Базисные функции:

Треугольник [4]:

$$H_\mu = P_1(\Omega), \tau = 1.$$

Базисные функции  
на  $\Omega_0$  имеют вид

$$\mu_1 = 1 - s_1 - s_2,$$

$$\mu_2 = s_1, \mu_3 = s_2.$$

Треугольник с узлами в серединах сторон [3]:

$H_\mu = P_2(\Omega)$ ,  $\tau = 2$ . Базисные функции на  $\Omega_0$  имеют вид

$$\mu_1 = 1 - 3s_1 - 3s_2 + 2s_1^2 + 4s_1s_2 + 2s_2^2,$$

$$\mu_2 = -s_1 + 2s_1^2, \mu_3 = -s_2 + 2s_2^2,$$

$$\mu_4 = 4s_1s_2, \mu_5 = 4s_2 - 4s_1s_2 - 4s_2^2, \mu_6 = 4s_1 - 4s_1s_2 - 4s_1^2.$$

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. - М.: Мир, 1980. - 512 с.
2. Карпиловский В.С. Четырехугольный восьмиузловой конечный элемент плиты // Строительная механика и расчет сооружений, 1990. — С. 13-17.
3. Евзеров И.Д. Неконформные конечные элементы для нелинейных уравнений с монотонными операторами// Численные методы механики сплошной среды. -1985. - Т.16. - №5. - С. 49-56.
4. Courant R. Variable methods for the solution of problem of equilibrium and vibration. - Bull. Amer. Math. Soc., 1943, №1.

# Конечные элементы с узлами на серединах сторон

## Базисные функции двумерных элементов изгиба ( $m=2$ ):

Треугольник [1]:

Базисные функции удовлетворяют условиям:  $H_\mu \supset P_2(\Omega)$ ,  $s_u = 3$ ,  $s_n = 2$ ,  $\tau = 2$ .

Конформные функции  $\lambda_k$ , удовлетворяющие (2.28), строятся из (2.32), (2.30) и (2.33),  $t = 1$ .

Базисные функции на  $\Omega_0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mu_i^0 + c_{ij} \varphi_j, \text{ где } \mu_1^0 = 1 - 3s_1^2 - 3s_2^2 + 2s_1^3 + 2s_2^3, \quad \mu_2^0 = s_2 - 2s_2^2 - s_1^2 s_2 + s_1^3, \\ \mu_3^0 &= -s_1 + 2s_1^2 - s_1^3 + s_1 s_2^2, \quad \mu_4^0 = 3s_1^2 - 2s_1^3, \quad \mu_5^0 = s_1^2 s_2, \quad \mu_6^0 = s_1^2 - s_1^3, \quad \mu_7^0 = 3s_2^2 - 2s_2^3, \\ \mu_8^0 &= s_2^2 - s_2^3, \quad \mu_9^0 = s_1 s_2^2, \quad \varphi_1 = s_1 s_2 (1 - s_1 - s_2), \quad \varphi_2 = s_1^2 s_2 (1 - s_1 - s_2), \quad \varphi_3 = s_1 s_2^2 (1 - s_1 - s_2), \\ c_{11} &= 6, \quad c_{12} = 12, \quad c_{13} = 12, \quad c_{21} = 1, \quad c_{22} = -4, \quad c_{23} = -2, \quad c_{31} = -1, \quad c_{32} = 2, \quad c_{33} = 4, \\ c_{41} &= -3, \quad c_{42} = 6, \quad c_{43} = 6, \quad c_{51} = -1/2, \quad c_{52} = 1, \quad c_{53} = -1, \quad c_{61} = -3/2, \quad c_{62} = 3, \quad c_{63} = 3, \\ c_{71} &= -3, \quad c_{72} = 6, \quad c_{73} = 6, \quad c_{81} = 3/2, \quad c_{82} = -3, \quad c_{83} = -3, \quad c_{91} = -1/2, \quad c_{92} = 1/2, \quad c_{93} = -1/2. \end{aligned}$$

Треугольник с узлами в серединах сторон [2]:

$P_4(\Omega) \subset H_\mu \subset P_5(\Omega)$ ,  $s_u = 5$ ,  $s_n = 3$ ,  $\tau = 2$ . Конформные функции  $\lambda_k$ , удовлетворяющие (2.28), строятся из (2.32), (2.30),  $t = 1$ .

1. **Евзеров И.Д.** Неконформные конечные элементы для нелинейных уравнений с монотонными операторами// Численные методы механики сплошной среды. –1985. – Т.16. - №5. - С. 49-56.
2. **Карпиловский В.С.** Методы конструирования конечных элементов. – Киев, 1980.-50 с. - Деп. УкрНИИНТИ 23.06.80, № 2153.

# Конечные элементы с узлами на серединах сторон

Четырехугольник:

Базисные функции удовлетворяют условиям:  $\mu_k \in P_3(\Omega_q)$ ,  $\mu_k \in C^1(\Omega)$ ,  $H_\mu \supset P_2(\Omega)$ ,  $\tau = 1$ .

Конформные функции  $\lambda_k$ , удовлетворяющие (2.28), строятся из (2.32), (2.30) и (2.33),  $t = 1$ .

Четырехугольник с узлами в серединах сторон [2]:

Базисные функции удовлетворяют условиям:  $\mu_k \in P_5(\Omega_q)$ ,  $\mu_k \in C^2(\Omega)$ ,  $H_\mu \supset P_3(\Omega)$ ,  $\tau = 2$ .

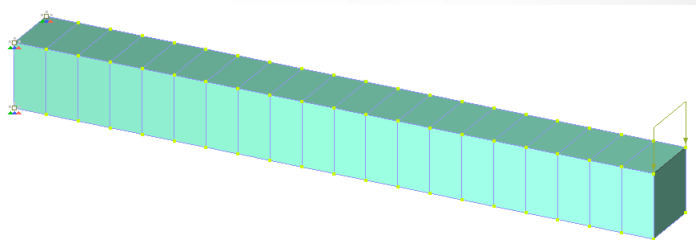
Конформные функции  $\lambda_k$ , удовлетворяющие (2.28), строятся из (2.32), (2.30) и (2.33),  $t = 1$ .

**Вычисление базисных функций четырехугольников и двумерных элементов изгиба сводится к решению систем линейных уравнений, которое выполняется программно.**

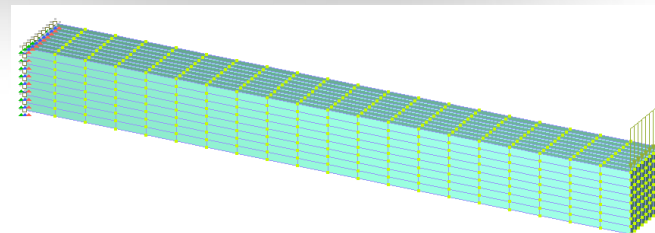
1. **Евзеров И.Д.** Неконформные конечные элементы для нелинейных уравнений с монотонными операторами // Численные методы механики сплошной среды. – 1985. – Т.16. - №5. - С. 49-56.
2. **Карпиловский В.С.** Треугольный шести узловой элемент плиты // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. -Новосибирск, 1989, №4.-стр.35-39.

# КЭ с узлами на сторонах

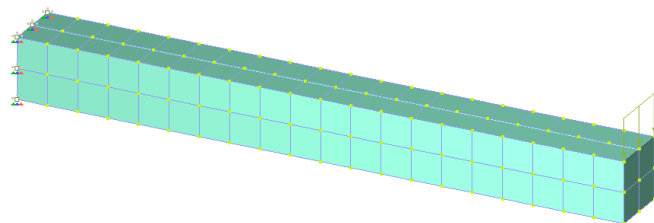
Задача №1 (разбивка 1x1x20)



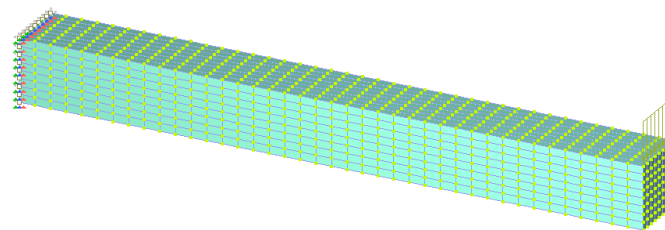
Задача №4 (разбивка 8x8x20)



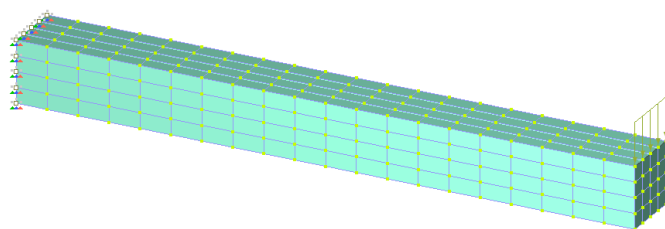
Задача №2 (разбивка 2x2x20)



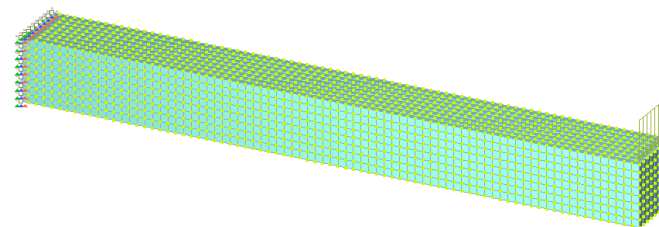
Задача №5 (разбивка 8x8x40)



Задача №3 (разбивка 4x4x20)



Задача №6 (разбивка 8x8x80)

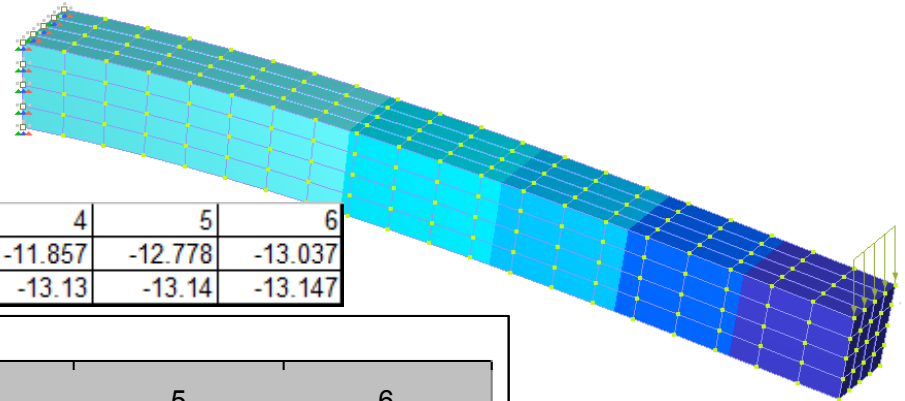




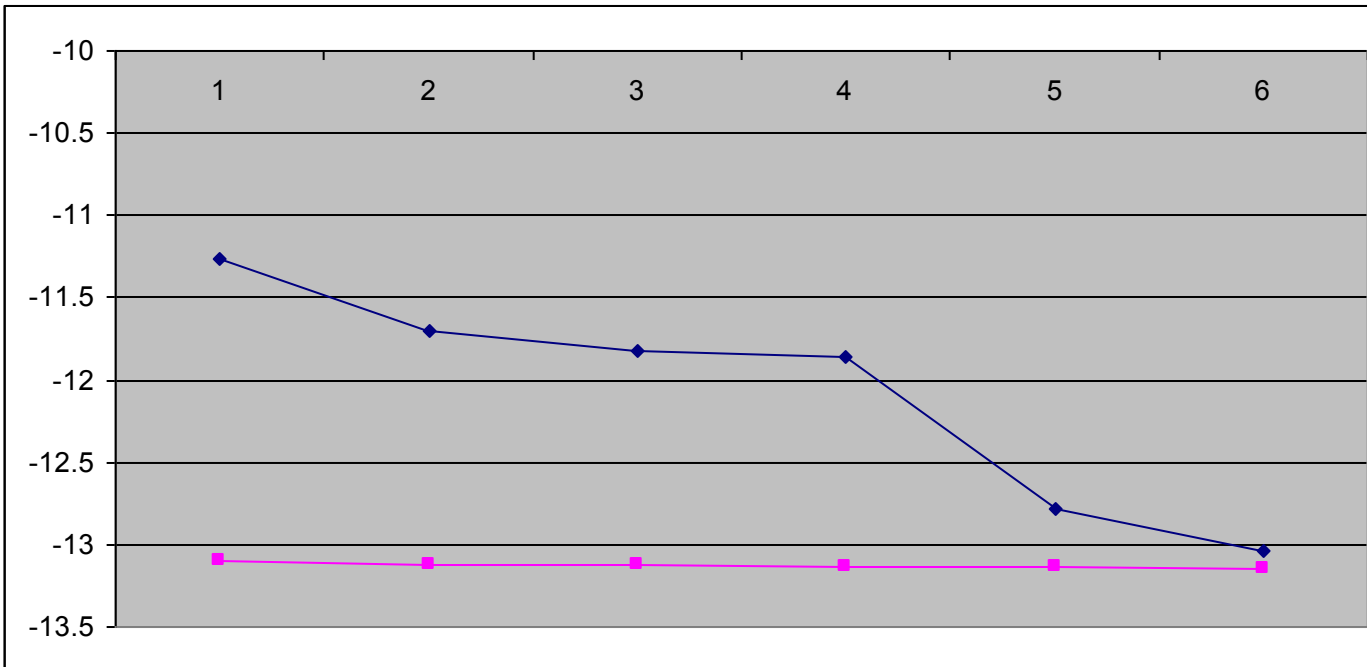
# КЭ с узлами на сторонах



1... Статическое нагружение  
min=-13.13 (512); max=0 (1)

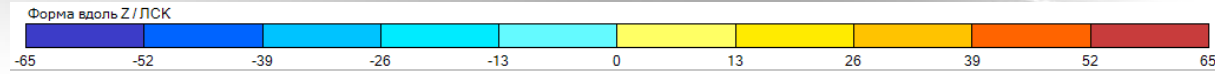


| Перемещение (мм)      | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| традиционные элементы | -11.268 | -11.7   | -11.824 | -11.857 | -12.778 | -13.037 |
| высокоточные элементы | -13.095 | -13.121 | -13.128 | -13.13  | -13.14  | -13.147 |

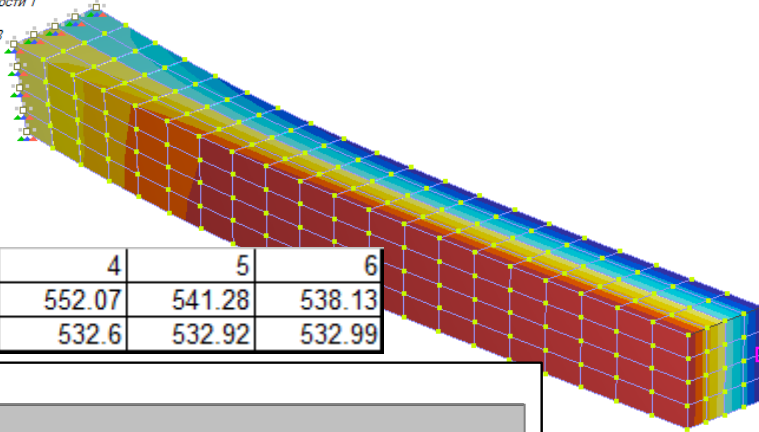




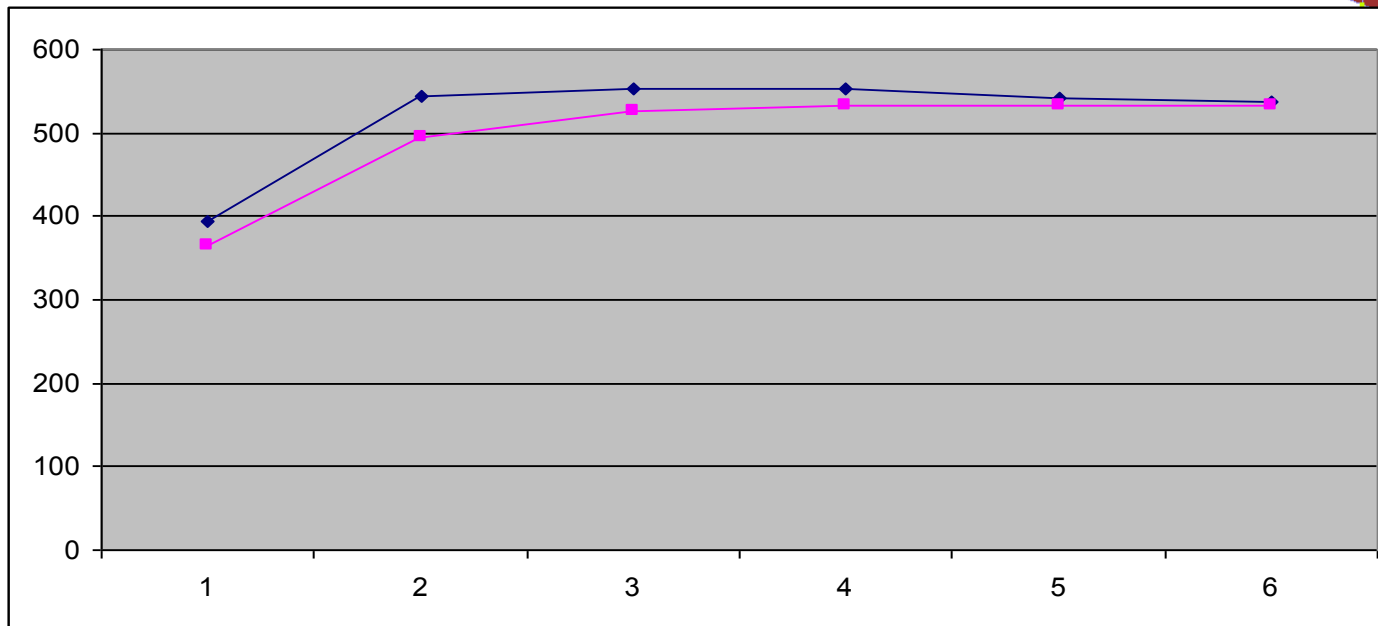
# КЭ с узлами на сторонах



2.1. Форма потери устойчивости 1  
 min=-65 (323); max=65 (315)  
 Коэффициент запаса: 526.08



| Коэф. Запаса          |  | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|-----------------------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| традиционные элементы |  | 393.06 | 543.48 | 553.22 | 552.07 | 541.28 | 538.13 |
| высокоточные элементы |  | 364.47 | 494.26 | 526.08 | 532.6  | 532.92 | 532.99 |



# КЭ с узлами на сторонах

Форма вдоль Z / ЛСК

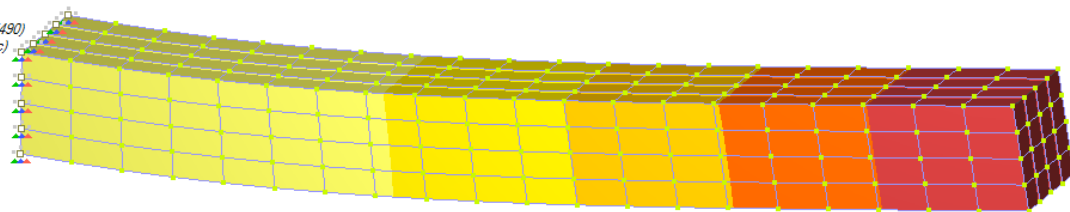


3.1. Форма 1

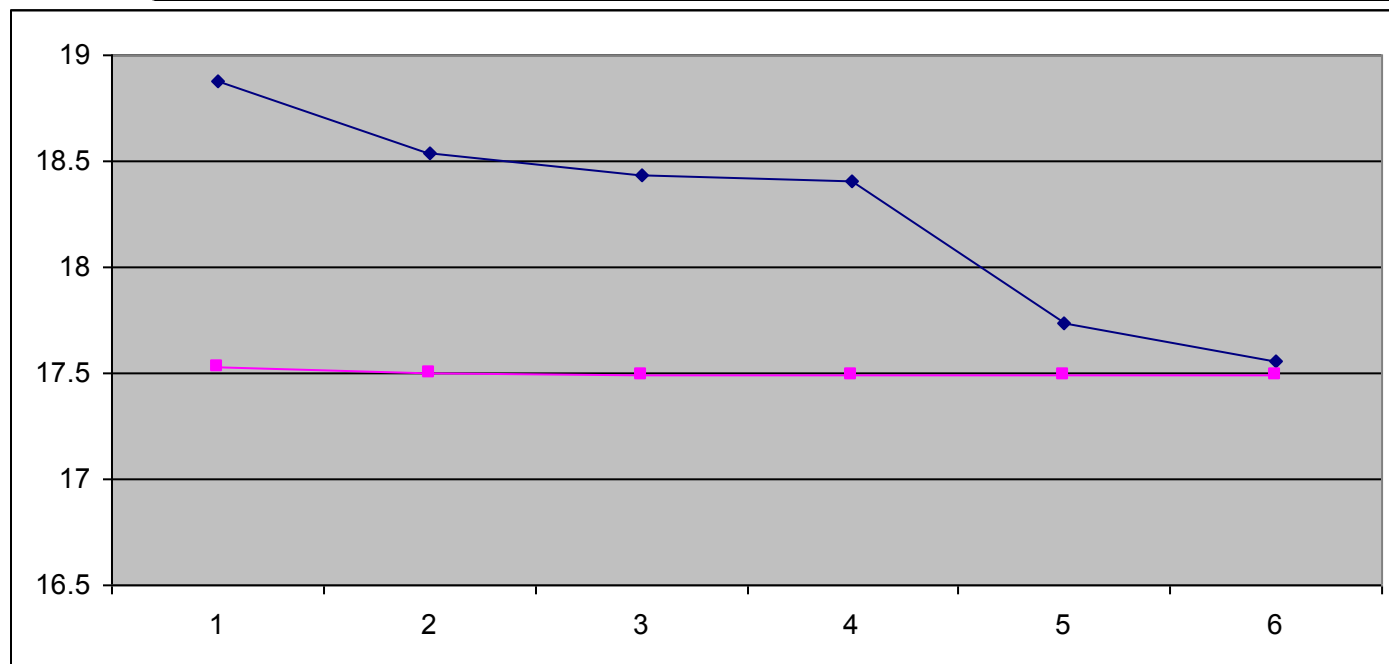
Массы собраны из: 2

тип=0 (1); max=1000 (490)

Частота: 17.498 (Рад/с)



| Частота (рад/с)          |  | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|--------------------------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| традиционные элементы    |  | 18.876 | 18.534 | 18.435 | 18.41  | 17.733 | 17.558 |
| высокочастотные элементы |  | 17.527 | 17.504 | 17.495 | 17.495 | 17.491 | 17.49  |



# КЭ с узлами на сторонах

<< Параметры расчета

Основные

Тип расчет: Полный

Оптимизация: Автоматически выби

Точность разложения матрицы жесткости:  $1e-7$

Точность решения динамической задачи:  $1e-5$

Использовать многопроцессорный расчет

Использовать 6 степеней свободы в КЭ оболочки

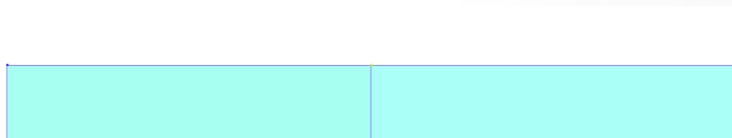
Использовать конечные элементы с дополнительными узлами

При успешном расчете выполнять расчет конструкций

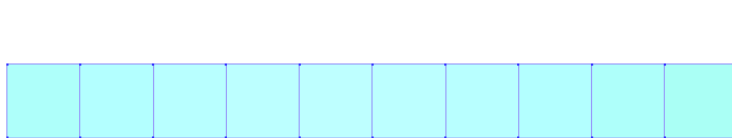
Запустить расчет

Переходить в результаты после успешного расчета

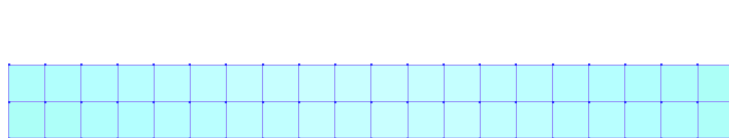
Задача №1 (разбивка 1x2)



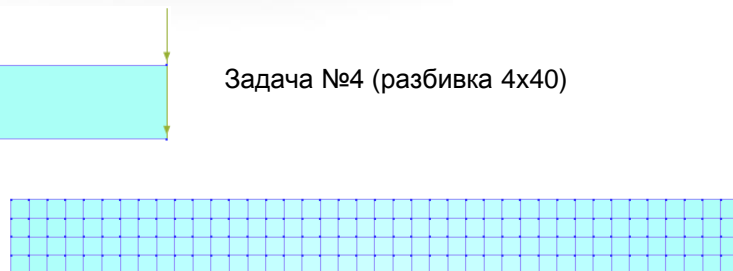
Задача №2 (разбивка 1x10)



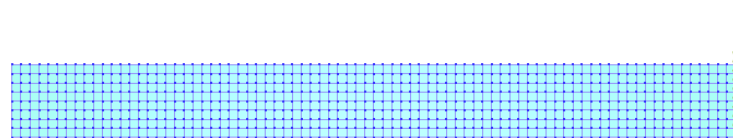
Задача №3 (разбивка 2x20)



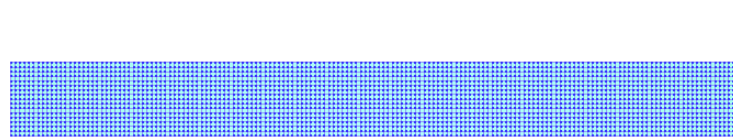
Задача №4 (разбивка 4x40)



Задача №5 (разбивка 8x80)

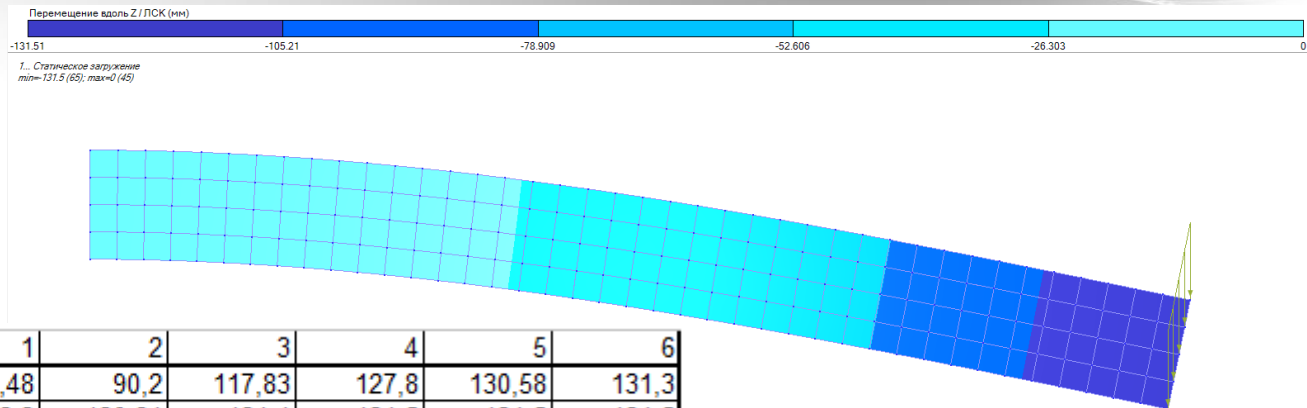


Задача №6 (разбивка 16x160)

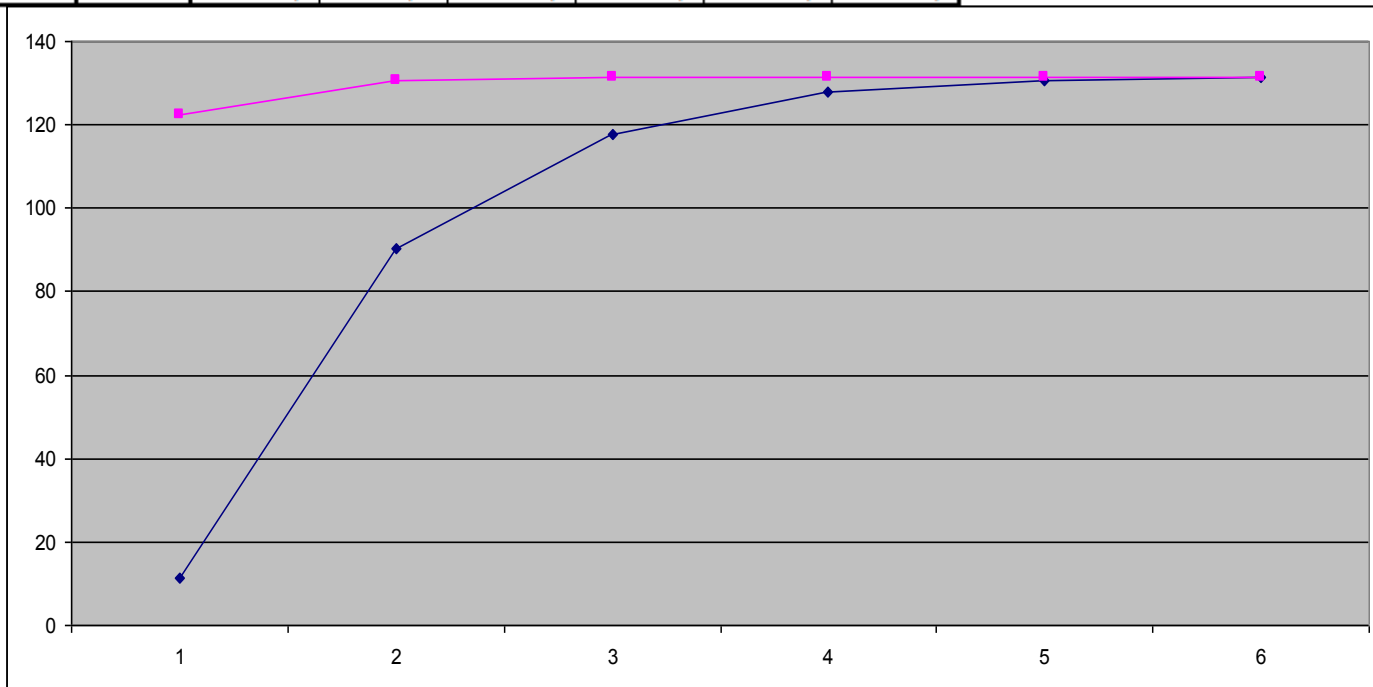


Использование элементов с узлами на ребрах

# КЭ с узлами на сторонах



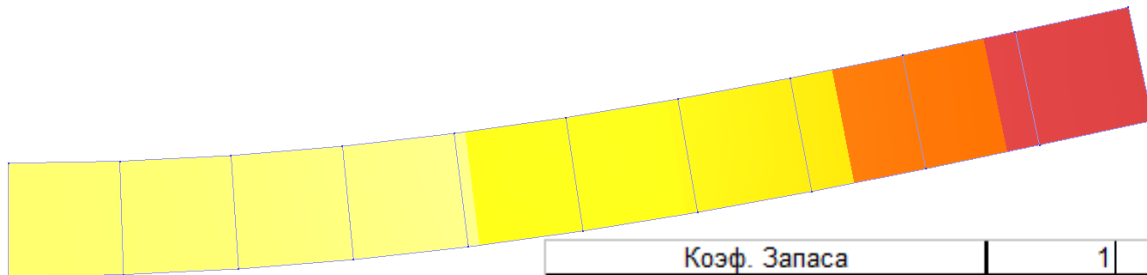
| перемещение (мм)      |  | 1     | 2      | 3      | 4     | 5      | 6     |
|-----------------------|--|-------|--------|--------|-------|--------|-------|
| традиционные элементы |  | 11,48 | 90,2   | 117,83 | 127,8 | 130,58 | 131,3 |
| высокоточные элементы |  | 122,3 | 130,81 | 131,4  | 131,5 | 131,5  | 131,5 |



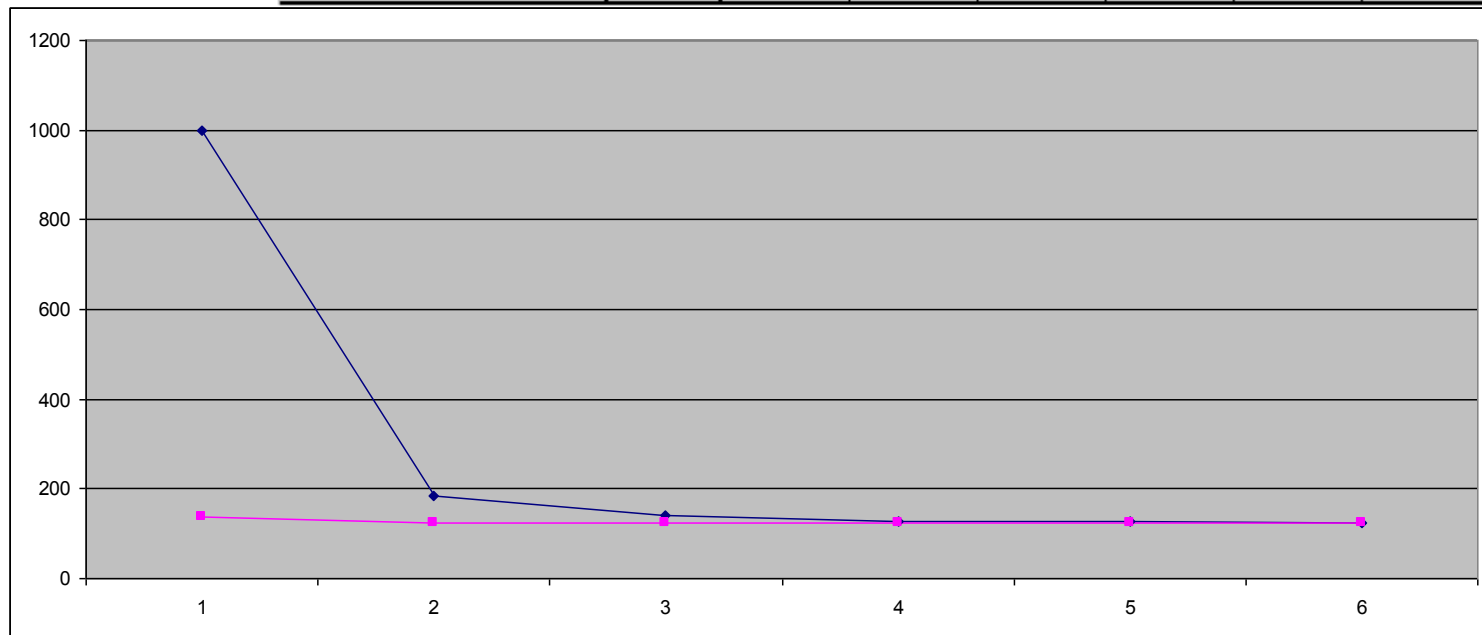
# КЭ с узлами на сторонах



2.5. Форма потери устойчивости 5  
 min=0 (1); max=1000 (21)  
 Коэффициент запаса: 125.69



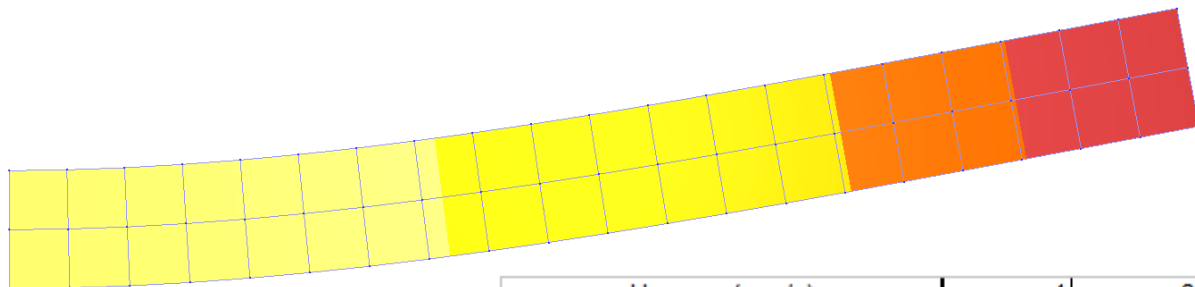
| Кэф. Запаса           |  | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       |
|-----------------------|--|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| традиционные элементы |  | 1000    | 182,943 | 139,765 | 128,85  | 126,102 | 125,409 |
| высокоточные элементы |  | 135,762 | 125,693 | 125,27  | 125,201 | 125,184 | 125,178 |



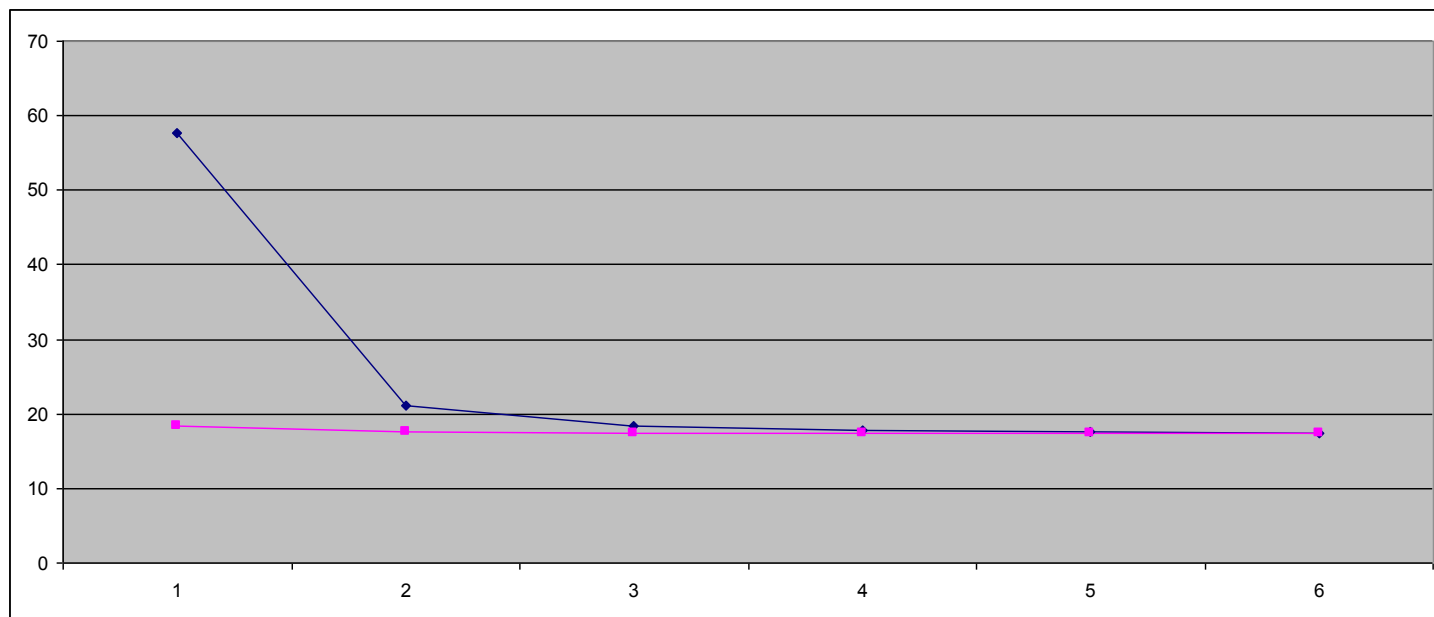
# КЭ с узлами на сторонах



2.4 Форма 4  
 Массы собраны из: плотность  
 $\rho=0$  (23);  $\rho_{ax}=1000$  (43)  
 Частота: 17.476 (Rad/s)



| Частота (рад/с)       |  | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|-----------------------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| традиционные элементы |  | 57,684 | 21,076 | 18,454 | 17,719 | 17,528 | 17,479 |
| высокоточные элементы |  | 18,42  | 17,532 | 17,476 | 17,466 | 17,463 | 17,462 |



## РАЗДЕЛ 7 ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ. ВЕРИФИКАЦИЯ ПК ЛИРА.

### ТЕСТ 7.1 ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ КОНСОЛЬНАЯ БАЛКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НА СВОБОДНОМ ТОРЦЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

#### Исходные данные:

$L=6$  м;  $b=0.1$  м;  $h=0.2$  м;

#### Характеристики материала:

$E=1 \times 10^7$  кПа,  $\mu=0.3$ ;

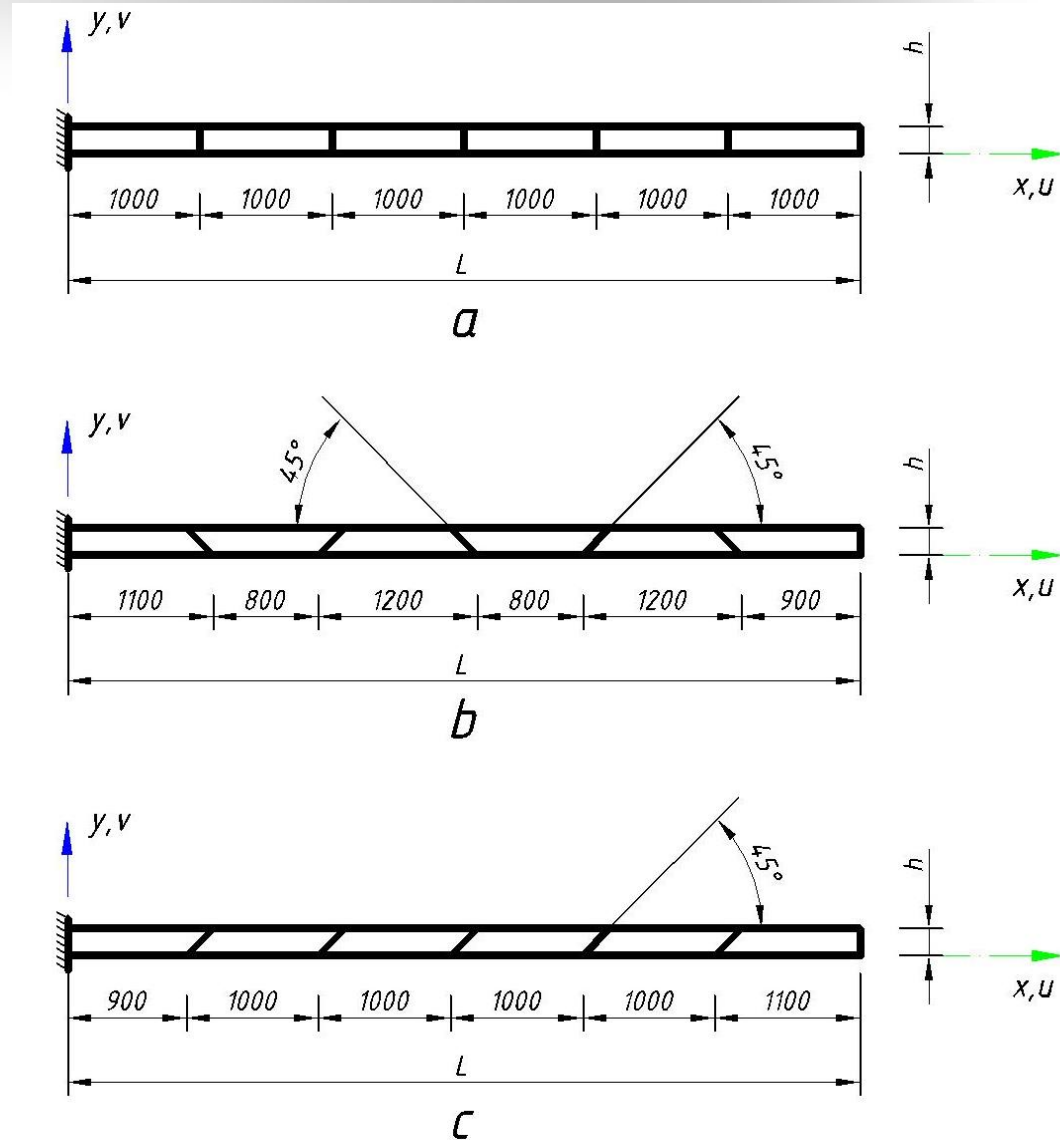
#### Граничные условия:

Узлы заделки:  $\omega = u = v = \theta_z = \theta_x = \theta_y = 0$ .

#### Нагрузка:

$P_x=1000$  Н ;  $P_y=1000$  Н ;  $M_x=1000$  Н·м ;

**Источник:** R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.





## ТЕСТ 7.1

### Описание задачи:

Модель 1a, 1b, 1c: Система моделировалась четырёх узловыми конечными элементами типа КЭ 44, количество узлов – 14, количество элементов – 6;

\*Модель 2a, 2b, 2c: Система моделировалась четырёх узловыми конечными элементами с узлами на сторонах типа КЭ 44, количество узлов – 14, количество элементов – 6;

Модель 3a, 3b, 3c: Система моделировалась трёх узловыми конечными элементами типа КЭ 42, количество узлов – 14, количество элементов – 12;

\*Модель 4a, 4b, 4c: Система моделировалась трёх узловыми конечными элементами с узлами на сторонах типа КЭ 42, количество узлов – 14, количество элементов – 12;

Модель 5a, 5b, 5c: Система моделировалась объёмными восьми узловыми конечными элементами типа КЭ 36, количество узлов – 28, количество элементов – 6;

\*Модель 6a, 6b, 6c: Система моделировалась объёмными восьми узловыми конечными элементами с узлами на сторонах типа КЭ 36, количество узлов – 28, количество элементов – 6;

Модель 7a, 7b, 7c: Система моделировалась объёмными шести узловыми конечными элементами типа КЭ 34, количество узлов – 28, количество элементов – 12;

\*Модель 8a, 8b, 8c: Система моделировалась объёмными шести узловыми конечными элементами с узлами на сторонах типа КЭ 34, количество узлов – 28, количество элементов – 12;

# ТЕСТ 7.1

| Модель | Вид нагрузки | Искомая величина         | Теория   | Результаты расчёта Лира 10.4 |           |           | Отклонение, % |              |              |
|--------|--------------|--------------------------|----------|------------------------------|-----------|-----------|---------------|--------------|--------------|
|        |              |                          |          | модель а                     | модель b  | модель с  | а             | б            | с            |
| 1      | $P_x$        | $u, (10^{-5} \text{ м})$ | 3        | 2.9863                       | 2.9871    | 2.9871    | 0.46          | 0.43         | 0.43         |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.010088                     | 0.002898  | 0.003685  | <b>90.66</b>  | <b>97.32</b> | <b>96.59</b> |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.426230                    | -0.425420 | -0.425465 | 1.34          | 1.52         | 1.51         |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.02340^ | 0.022733                     | 0.020509  | 0.020563  | 2.85          | 12.35        | 12.12        |
| 2*     | $P_x$        | $u, (10^{-5} \text{ м})$ | 3        | 3.0046                       | 3.0049    | 3.0049    | 0.15          | 0.16         | 0.16         |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.10579                      | 0.10302   | 0.10414   | <b>2.05</b>   | <b>4.61</b>  | <b>3.57</b>  |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.42761                     | -0.4278   | -0.4278   | 1.02          | 0.97         | 0.97         |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.02340^ | 0.022813                     | 0.022746  | 0.022749  | 2.5           | 2.79         | 2.79         |
| 3      | $P_x$        | $u, 10^{-5} \text{ м})$  | 3        | 2.9768                       | 2.9744    | 2.9791    | 0.77          | 0.85         | 0.70         |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.003418                     | 0.001615  | 0.002404  | <b>96.84</b>  | <b>98.5</b>  | <b>97.77</b> |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.421265                    | -0.42107  | -0.42172  | 2.49          | 2.62         | 2.38         |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.02340^ | 0.018560                     | 0.018771  | 0.019384  | <b>20.68</b>  | <b>19.78</b> | <b>17.16</b> |
| 4*     | $P_x$        | $u, (10^{-5} \text{ м})$ | 3        | 3.0093                       | 3.0071    | 3.0118    | 0.31          | 0.24         | 0.39         |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.10627                      | 0.10388   | 0.1049    | <b>1.6</b>    | <b>3.81</b>  | <b>2.87</b>  |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.426575                    | -0.426035 | -0.42695  | 1.26          | 1.38         | 1.17         |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.02340^ | 0.023023                     | 0.022994  | 0.02305   | <b>1.61</b>   | <b>1.74</b>  | <b>1.5</b>   |

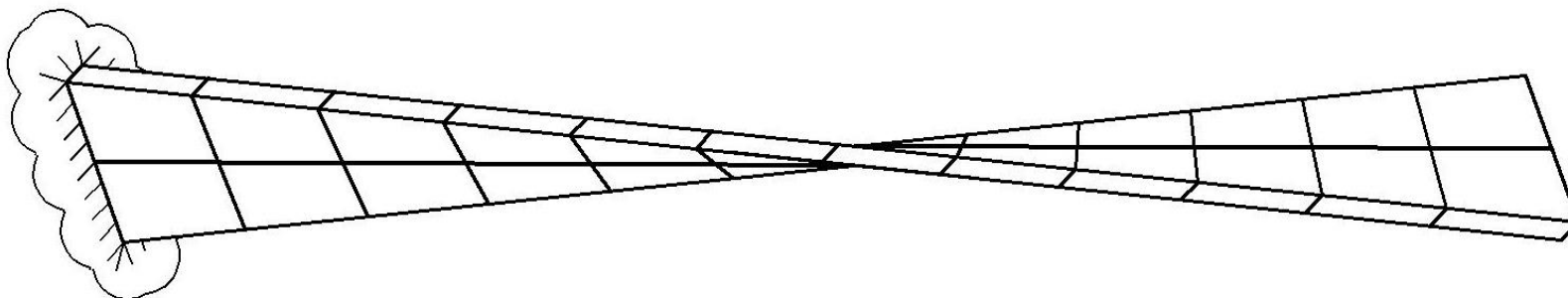
# ТЕСТ 7.1

| Модель | Вид нагрузки | Искомая величина         | Теория   | Результаты расчёта Лира 10.4 |           |           | Отклонение, % |       |       |
|--------|--------------|--------------------------|----------|------------------------------|-----------|-----------|---------------|-------|-------|
|        |              |                          |          | модель а                     | модель b  | модель с  | а             | б     | с     |
| 5      | $P_x$        | $u, (10^{-5} \text{ м})$ | 3        | 2.9568                       | 2.9576    | 2.9575    | 1.44          | 1.41  | 1.42  |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.01043                      | 0.002764  | 0.003409  | 90.34         | 97.44 | 96.84 |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.010882                    | -0.004516 | -0.006154 | 97.48         | 98.95 | 98.58 |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.034109 | 0.02682                      | 0.01617   | 0.01103   | 21.37         | 52.59 | 67.66 |
| 6*     | $P_x$        | $u, (10^{-5} \text{ м})$ | 3        | 3.0017                       | 3.0023    | 3.0024    | 0.057         | 0.077 | 0.08  |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.10488                      | 0.095738  | 0.10453   | 2.89          | 11.35 | 3.21  |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.41511                     | -0.39735  | -0.40671  | 3.91          | 8.02  | 5.85  |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.034109 | 0.029017                     | 0.029013  | 0.02901   | 14.93         | 14.94 | 14.95 |
| 7      | $P_x$        | $u, (10^{-5} \text{ м})$ | 3        | 2.9497                       | 2.9501    | 2.94845   | 1.68          | 1.66  | 1.72  |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.003362                     | 0.001616  | 0.002129  | 96.89         | 98.50 | 98.03 |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.01106                     | -0.00511  | -0.00590  | 97.44         | 98.82 | 98.63 |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.034109 | 0.002479                     | 0.004106  | 0.006401  | 92.73         | 87.96 | 81.23 |
| 8*     | $P_x$        | $u, (10^{-5} \text{ м})$ | 3        | 3.0032                       | 3.0002    | 3.0077    | 0.11          | 0.01  | 0.26  |
|        | $P_y$        | $v, \text{ м}$           | 0.1080   | 0.10467                      | 0.10241   | 0.10315   | 3.08          | 5.18  | 4.49  |
|        | $P_z$        | $\omega, \text{ м}$      | -0.4320  | -0.4149                      | -0.41013  | -0.40987  | 3.96          | 5.06  | 5.12  |
|        | $M_x$        | $\theta_x, \text{ рад}$  | 0.034109 | 0.028970                     | 0.029018  | 0.028964  | 15.07         | 14.93 | 15.08 |

\* Использование КЭ с узлами на сторонах

## РАЗДЕЛ 7 ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ. ВЕРИФИКАЦИЯ ПК ЛИРА.

### ТЕСТ 7.7 СКРУЧЕННАЯ КОНСОЛЬНАЯ БАЛКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НА СВОБОДНОМ ТОРЦЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ



**Исходные данные:**

$L=12.0$  м,  $b=1.1$  м,  $t=0.32$  м;  $\alpha=\pi/2$  – угол скручивания продольной оси балки;

**Характеристики материала:**

$E=2.9 \times 10^7$  кПа,  $\mu=0.22$ ;

**Граничные условия:**

Все узлы заделки:  $\omega = u = v = \theta_z = \theta_x = \theta_y = 0$ .

**Нагрузка:**

$P_y=1$  кН,  $P_z=1$  кН;

**Описание задачи:**

Модель 1(2\*): Система моделировалась трёх узловыми конечными элементами типа КЭ 42

Модель 3 (4\*): Система моделировалась трёх узловыми конечными элементами типа КЭ 46,

Модель 5 (6\*): Система моделировалась объёмными четырёх узловыми конечными элементами типа КЭ 32

## Тест 7.7

| Модель | Нагрузка | Искомая величина                         | Теория   | Результаты расчёта<br>ЛиРА 10.4 | Отклонение,<br>% |
|--------|----------|------------------------------------------|----------|---------------------------------|------------------|
| 1      | $P_y$    | Смещение свободного торца – $v$ , м      | 0.001754 | 0.0014639                       | 16.54            |
|        | $P_z$    | Смещение свободного торца – $\omega$ , м | 0.005424 | 0.0053137                       | 2.03             |
| 2*     | $P_y$    | Смещение свободного торца – $v$ , м      | 0.001754 | 0.0017499                       | 0.23             |
|        | $P_z$    | Смещение свободного торца – $\omega$ , м | 0.005424 | 0.0053882                       | 0.66             |
| 3      | $P_y$    | Смещение свободного торца – $v$ , м      | 0.001754 | 0.0015579                       | 12.59            |
|        | $P_z$    | Смещение свободного торца – $\omega$ , м | 0.005424 | 0.0056613                       | 4.19             |
| 4*     | $P_y$    | Смещение свободного торца – $v$ , м      | 0.001754 | 0.0019523                       | 11.31            |
|        | $P_z$    | Смещение свободного торца – $\omega$ , м | 0.005424 | 0.0061075                       | 12.60            |
| 5      | $P_y$    | Смещение свободного торца – $v$ , м      | 0.001754 | 0.000253                        | 95.34            |
|        | $P_z$    | Смещение свободного торца – $\omega$ , м | 0.005424 | 0.000321                        | 94.08            |
| 6*     | $P_y$    | Смещение свободного торца – $v$ , м      | 0.001754 | 0.0017627                       | 0.50             |
|        | $P_z$    | Смещение свободного торца – $\omega$ , м | 0.005424 | 0.0053949                       | 0.54             |

## РАЗДЕЛ 7 ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ. ВЕРИФИКАЦИЯ ПК ЛИРА.

ТЕСТ 7.14 ОТКРЫТАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА  
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ В ПЛАНЕ И СВОБОДНО ОПЁРТАЯ  
ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ КРОМКАМ

### Исходные данные:

$R=25.0$  м – радиус серединной поверхности цилиндрической оболочки;

$L=50.0$  м – длина образующей цилиндрической оболочки;

$2\phi=2\times 40^\circ$  – центральный угол дуги;

$h = 0.25$  м – толщина оболочки;

### Характеристики материала:

$E= 4.32\times 10^8$  кПа,  $\mu=0.0$ ;

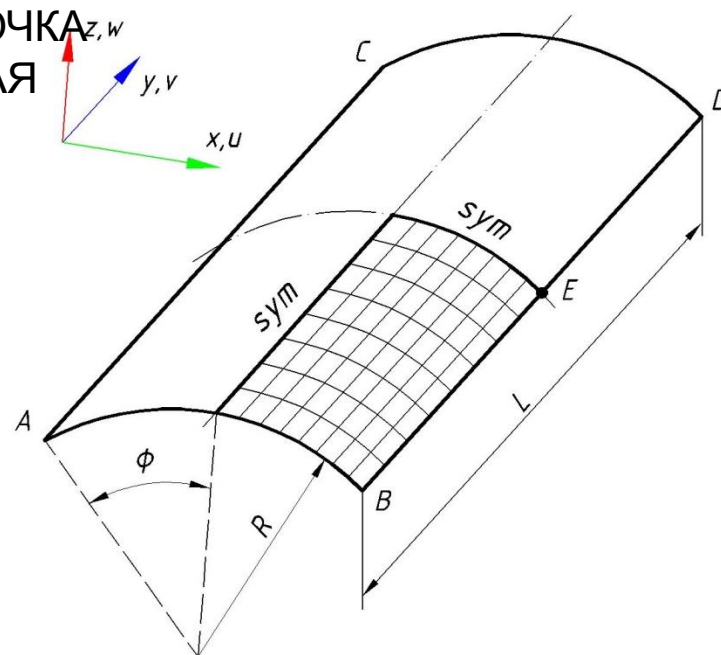
### Граничные условия:

Наложение связей по условиям симметрии

По дуге;  $\omega = v = 0$ ;

### Нагрузка:

$q=90$  кН/м – равномерно распределённая сила по всей поверхности цилиндрической оболочки;



**Источник:** R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20; A. C. Scordelis, K. S. Lo, Computer analysis of cylindrical shells, Journal of the American concrete institute, Title No 61-33, May 1964, p. 539-561. Design of cylindrical concrete shell roofs, New York, Manual No 31 American society of civil engineers, 1952.

## ТЕСТ 7.14

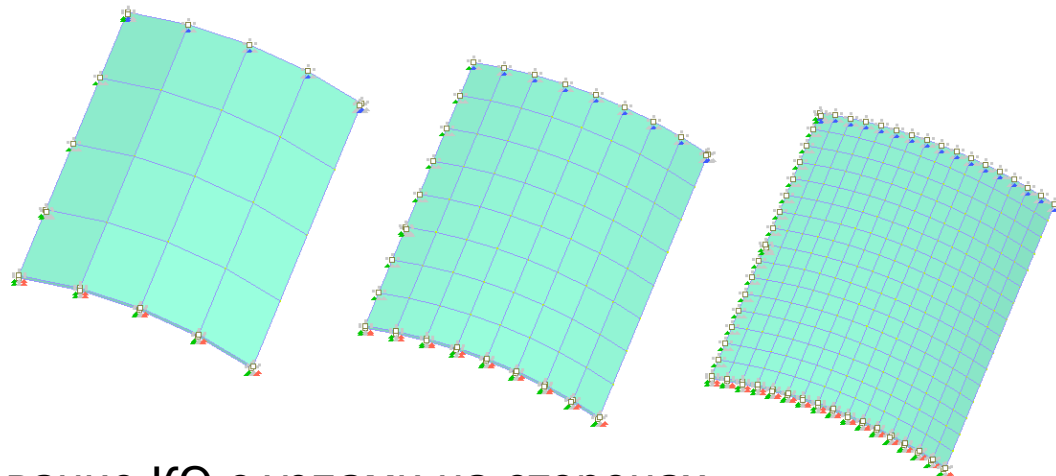
Рассматривается расчётная схема четверти цилиндрической оболочки по условиям симметрии.

Модель 1(2\*): Система моделировалась трёх узловыми конечными элементами типа КЭ 42 с регулярной сеткой 4x4, 8x8, 16x16. Количество узлов – 25, 81, 289. Количество элементов – 32, 128, 512;

Модель 3(4\*): Система моделировалась четырёх узловыми конечными элементами типа КЭ 44 с регулярной сеткой 4x4, 8x8, 16x16. Количество узлов – 25, 81, 289. Количество элементов – 16, 64, 256;

Модель 5(6\*): Система моделировалась объёмными шести узловыми конечными элементами типа КЭ 34 с регулярной сеткой 4x4, 8x8, 16x16. Количество узлов – 20, 162, 578. Количество элементов – 32, 128, 512;

Модель 7(8\*): Система моделировалась объёмными восьми узловыми конечными элементами типа КЭ 36 с регулярной сеткой 4x4, 8x8, 16x16. Количество узлов – 20, 162, 578. Количество элементов – 16, 64, 256;





## Тест 7.14

| Модель | Искомая величина, м | Теория | Результаты расчёта Лира 10.4, м |          |          | Отклонение, % |               |               |
|--------|---------------------|--------|---------------------------------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|
|        |                     |        | 4x4                             | 8x8      | 16x16    | 4x4           | 8x8           | 16x16         |
| 1      | $V_E$               | 0.3086 | -0.20193                        | -0.25820 | -0.28790 | <b>34.57</b>  | <b>16.33</b>  | <b>6.71</b>   |
| *2     | $V_E$               | 0.3086 | -0.30457                        | -0.30089 | -0.30058 | <b>1.31</b>   | <b>2.50</b>   | <b>2.60</b>   |
| 3      | $V_E$               | 0.3086 | -0.27452                        | -0.29118 | -0.29798 | <b>11.04</b>  | <b>5.64</b>   | <b>3.44</b>   |
| *4     | $V_E$               | 0.3086 | -0.30428                        | -0.30084 | -0.30057 | <b>1.40</b>   | <b>2.51</b>   | <b>2.60</b>   |
| 5      | $V_E$               | 0.3086 | -0.01380                        | -0.02459 | -0.04429 | <b>95.53</b>  | <b>92.03</b>  | <b>85.65</b>  |
| *6     | $V_E$               | 0.3086 | -0.21109                        | -0.29569 | -0.30655 | <b>-31.60</b> | <b>-4.18</b>  | <b>-0.66</b>  |
| 7      | $V_E$               | 0.3086 | -0.01908                        | -0.03763 | -0.08013 | <b>-93.82</b> | <b>-87.81</b> | <b>-74.03</b> |
| *8     | $V_E$               | 0.3086 | -0.31154                        | -0.30794 | -0.30766 | <b>0.95</b>   | <b>-0.21</b>  | <b>-0.30</b>  |



**ЛИРА**  
С О Ф Т

[lira-soft.com](http://lira-soft.com)

+7 (499) 922-00-02

# Реализация конечных элементов с узлами на сторонах в ПК ЛИРА 10.4

**Евзеров И.Д.**

д.т.н., науч. руководитель проекта ЛИРА 10

**Колесников А.В.**

технический директор «ЛИРА софт»

[lira@lira-soft.com](mailto:lira@lira-soft.com)

**Москва**  
**2015**