Название: Расчёт на собственные колебания в ПК ЛИРА 10.6

Аннотация: в заметке рассматриваются теоретические предпосылки и практическая реализация расчёта на собственные колебания конструкций.

Для соц. сетей: Самый банальный пример необходимости оценки частот – расчёт на пульсационные воздействия п. 11.1.8 СП 20.13330.2011, в котором расчётная формула зависит от значений первых частот собственных колебаний (в ПК ЛИРА выбор формулы производится автоматически, в зависимости от полученных частот).

Любые расчёты, производимые на динамические воздействия, не обходятся без расчёта на собственные колебания конструкций. В сегодняшней заметке подробно разберем вопрос определения частот и форм собственных колебаний и с теоретической, и с практической стороны.

Собственные колебания - колебания, которые совершаются за счет энергии, сообщенной системе в начале колебательного движения (например, в механической системе через начальное смещение тела или придание ему начальной скорости). Амплитуда собственных колебаний в отличие от вынужденных колебаний определяется только этой энергией, а их частота - свойствами самой системы. Вследствие рассеяния энергии, собственные колебания всегда являются затухающими колебаниями. Пример собственных колебаний - звучание колокола, гонга, струны рояля и т.п.

Собственные колебания линейной системы с n степенями свободы можно описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (1)$$

Где $\{u\}$ вектор-столбец перемещений; $[M]$ и $[K]$ – соответственно матрицы масс и жесткостей.

Динамическими характеристиками систем, колебания которых описываются системой (1), являются собственные частоты и собственные формы колебаний. Если такая система выведена из положения равновесия, то она будет совершать свободные колебания, в процессе которых каждая из степеней свободы движется по закону, отличающемуся от синусоидального. Очевидно, что при этом в любой момент времени между координатами системы сохраняются одни и те же соотношения (говорят, что не изменяется «конфигурация» системы). Число таких конфигураций и соответствующих им частот равно порядку системы (т.е. вектора перемещений $\{u\}$). Для j-ой конфигурации этот вектор имеет вид:

$$\{u_j\} = \{\phi_j\}\sin\omega_j t \quad (2)$$

где $\{\phi_j\}$ – вектор амплитуд, который называется j-ой собственной формой, соответствующая круговая частота ω_j называется j-ой собственной частотой.

Вектор $\{\phi_j\}$ является решением однородной системы алгебраических уравнений

$$([K] - \omega_j^2[M])\{\phi_j\} = \{0\} \quad (3)$$

Это решение не равно тождественно нулю (что означало бы отсутствие перемещений) только при условии равенства нулю детерминанта системы

$$\det([K] - \omega_j^2[M]) = 0 \quad (4)$$

Из равенства (4) получаем значения собственных частот ω_j. Подставляя значения полученных собственных частот в систему уравнений (3), находят соответствующие собственные формы $\{\phi_j\}$.

Равенство (3) означает, что одно из уравнений этой системы является линейной комбинацией остальных, т.е. для нахождения n неизвестных имеется только n-1 уравнений. Поэтому, одну из компонент вектора $\{\phi_j\}$ можно принять произвольной, а остальные выразить через нее. Таким образом собственные формы определяются с точностью до постоянного множителя. Так же, собственные частоты и формы зависят только от распределения масс и жесткостей (матриц M и K) и не зависят от начальных условий.

В ПК ЛИРА решение задачи нахождения форм и частот собственных колебаний осуществляется методом итерации подпространств.

Теперь обратимся к вынужденным колебаниям линейных дискретных систем, в любой реальной системе всегда возникает затухание и колебания такой системы описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}, \tag{5}$$

где $[C]$ – матрица диссипации энергии, $\{F(t)\}$ – вектор нагрузки.

Например, в случае сейсмического воздействия в качестве нагрузки выступают переносные силы инерции и (5) преобразуется в виде:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{J_x\}\ddot{X}_0(t), \tag{6}$$

где $\{u\}$ – вектор относительных перемещений (в системе координат, связанной с основанием), $\{J_x\}$ – вектор, компонентами которого являются косинусы углов между направлениями перемещений по степеням свободы и вектором ускорения основания. В частности, компонента вектора $\{J_x\}$ равна ± 1, если перемещение по данной степени свободы является линейным и его положительное направление соответственно совпадает или противоположно положительному направлению ускорения основания; эта компонента равна нулю, если они перпендикулярны, а также если данная координата системы является угловой. Когда возмущение $\ddot{X}_0(t)$ направлено по одной из глобальных осей, компонентами вектора $\{J_x\}$ являются направляющие косинусы соответствующих степеней свободы относительно этой оси.

Решение данной системы уравнений может находиться методами прямого пошагового интегрирования, что реализовано в модуле Динамика+, но данный метод достаточно трудоемкий и применяется лишь в редких случаях (например, при расчетах на МРЗ).

В случае же линейной системы обычно используют способ решения разложением движения по собственным формам или модальный анализ. При этом решение уравнения (5) записывается в виде:

$$\{u(t)\} = \sum_{j=1}^{n}\{\phi_j\}\, q_j(t), \tag{7}$$

где n – число степеней свободы системы, $q_j(t)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению и определяющие обобщенные координаты.

Введем новую функцию $\vartheta_j(t)$ – относительное перемещение, посредством соотношения

$$q_j(t) = \Gamma_j \vartheta_j(t), \tag{8}$$

где Γ_j –модальный коэффициент участия, он показывает, какой вклад вносит j-я форма в общий отклик системы. Не приводя подробных выкладок:

$$\Gamma_j = \frac{\{\phi_j\}^T [M] \{J_x\}}{\|\phi_j\|^2} \tag{9}$$

Тогда получим:

$$\{u(t)\} = \sum_{j=1}^{n} \{\eta_j\} \vartheta_j(t), \tag{10}$$

где использовано обозначение

$$\{\eta_j\} = \{\phi_j\} \Gamma_j, \tag{11}$$

В сумме (10) j-й член – это вектор модальных перемещений.

Между векторами $\{\eta_j\}$ и $\{J_x\}$ существует соотношение

$$\{J_x\} = \sum_{j=1}^{n} \{\eta_j\}, \tag{12}$$

оно позволяет оценивать точность сейсмических расчётов.

Для определения сейсмических инерционных нагрузок на сооружение необходимо знать абсолютные ускорения его точек. Их вектор равен: $\{\ddot{u}_a(t)\} = \{\ddot{u}(t)\} + \{J_x\}\ddot{X}_0(t)$, с учётом (10) и (11),

$$\{\ddot{u}_a(t)\} = \sum_{j=1}^{n} \{\eta_j\} \left[\ddot{\vartheta}_j(t) + \ddot{X}_0(t)\right]. \tag{13}$$

Сумма функций в квадратных скобках – это абсолютное ускорение, отвечающее j-ой собственной форме, обозначим его $\ddot{\vartheta}_{ja}(t)$:

$$\ddot{\vartheta}_{ja}(t) = \ddot{\vartheta}_j(t) + \ddot{X}_0(t). \tag{14}$$

Тогда окончательно имеем

$$\{\ddot{u}_a(t)\} = \sum_{j=1}^{n} \{\eta_j\} \ddot{\vartheta}_{ja}(t) \tag{15}$$

Использование метода разложения по собственным формам позволяет вместо интегрирования связанной системы дифференциальных уравнений выполнять значительно более простое интегрирование независимых уравнений. При этом, если воздействие является низкочастотным (в случае землетрясения или ветра), в суммах (10) и (12) можно учитывать лишь несколько первых слагаемых, так как вклад высших собственных форм незначителен. Это является главным преимуществом данного метода.

Представленной теории достаточно для перехода к рассмотрению практической реализации расчётов на собственные колебания. Более подробно с теоретическими основами можно ознакомится в работе [1].

В качестве примера рассмотрим определение форм и частот собственных колебаний 18-ти этажного здания (рис.1).

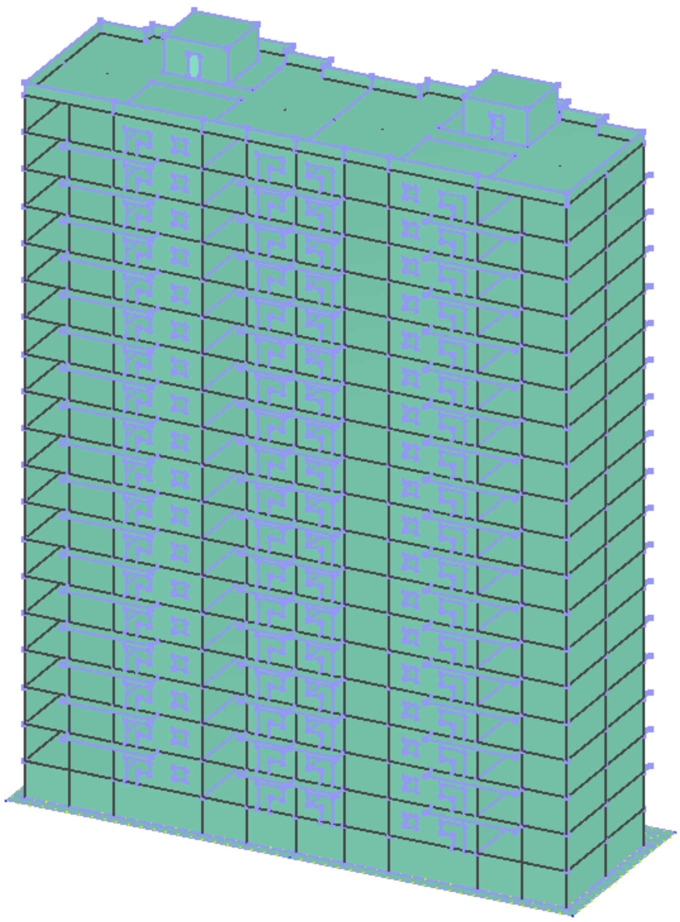


Рис. 1. Модель здания

Для расчёта на собственные колебания необходимо в редакторе загружений в выпадающем списке выбрать загружение «Модальный анализ».

В появившемся справа меню необходимо указать количество форм, подлежащих определению, как было показано выше, чем больше число форм мы указываем, тем больше уравнений будет решаться, соответственно, тем дольше будет производится расчёт. Также указывается из каких загружений будут собираться массы для модального анализа. При этом для постоянных нагрузок используется коэффициент 0.9, для длительных – 0.8 и для кратковременных 0.5 (рис. 2).

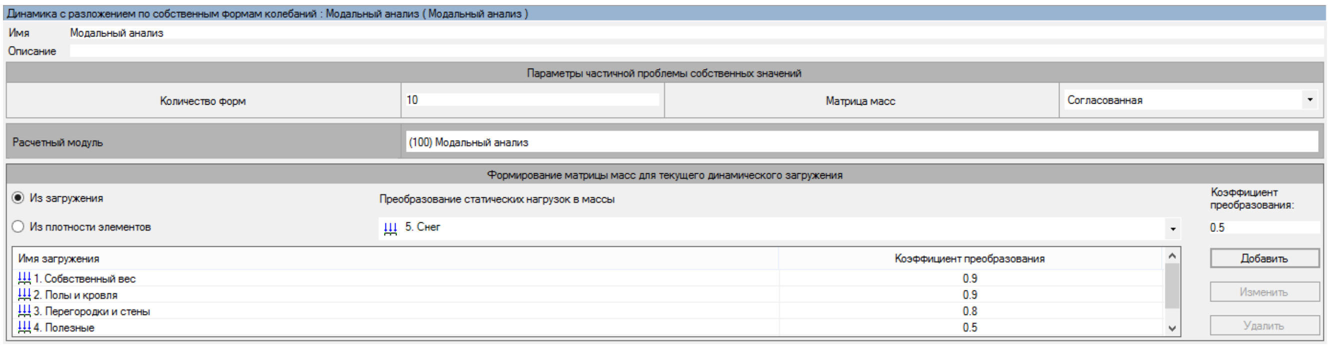
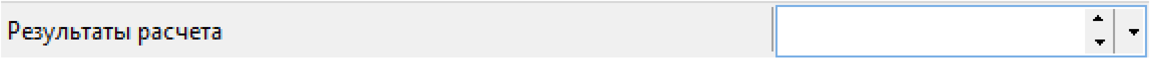


Рис. 2. Сбор масс для модального анализа

Отметим, что при добавлении в библиотеку загружений загружения Модальный анализ, в результатах расчёта будут доступны только результаты по вычислению собственных форм и частот колебаний здания. Строка с выбором загружения остается пустой



это не должно пугать пользователя.

Анализ собственных форм и частот следует начинать с просмотра таблиц. Для этого во вкладке **Документирование** переходим к пункту **Таблицы результатов**, выбираем необходимую нам таблицу и нажимаем кнопку Сформировать (рис. 3).

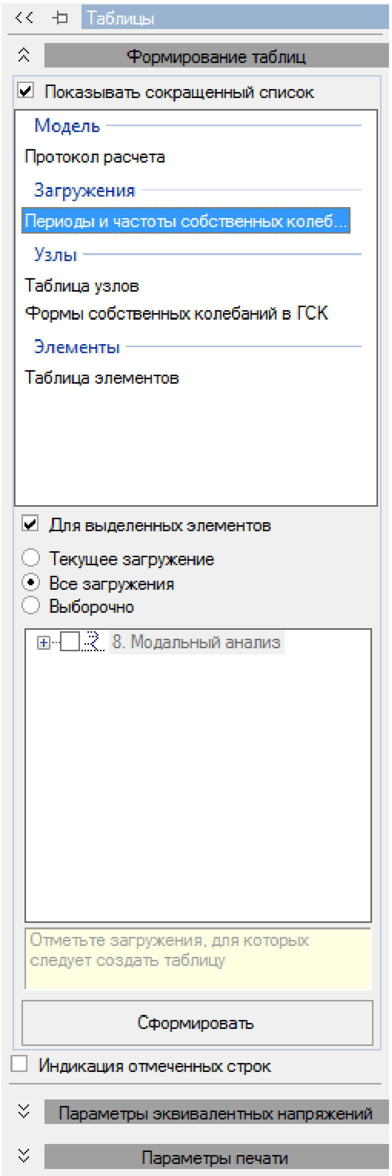


Рис. 3. Формирование таблицы периодов и частот собственных колебаний

Для рассматриваемого примера основные формы выявляются достаточно четко – это формы, имеющие наибольшую модальную массу: 1, 2, 4 (рис. 4).

Загружение	Форма	Собственное значение	Частота (Рад/с)	Период (с)	Коэффициент распределения	Модальная масса (%)	Суммарная модальная масса (%)
8	1	0.173751	2.399	2.619	1.54956	22.9154	22.9154
8	2	0.081942	3.4934	1.7986	1.4673	21.0704	43.9858
8	3	0.0261183	6.1877	1.0154	0.0219368	0	43.9878
8	4	0.00947323	10.274	0.61155	1.04867	32.4085	76.3963
8	5	0.00342972	17.075	0.36797	0.126481	0.255689	76.652
8	6	0.00225167	21.074	0.29815	-0.817072	5.77897	82.431
8	7	0.00151341	25.705	0.24443	-0.849757	6.03513	88.4661
8	8	0.00118073	29.102	0.2159	-0.0367978	0	88.4718
8	9	0.00106547	30.636	0.20509	0.0529899	0.0206313	88.4924
8	10	0.000739336	36.777	0.17084	-0.00115854	0	88.4924

Рис.4. Таблица собственных частот и периодов

Далее перейдем к основным результатам, для этого в меню **Результаты** выбираем пункт **Колебания.** После этого в строке выбора загружений появляется загружение «Модальный анализ», в котором можно выбрать интересующую форму для ее визуального анализа (рис. 5).

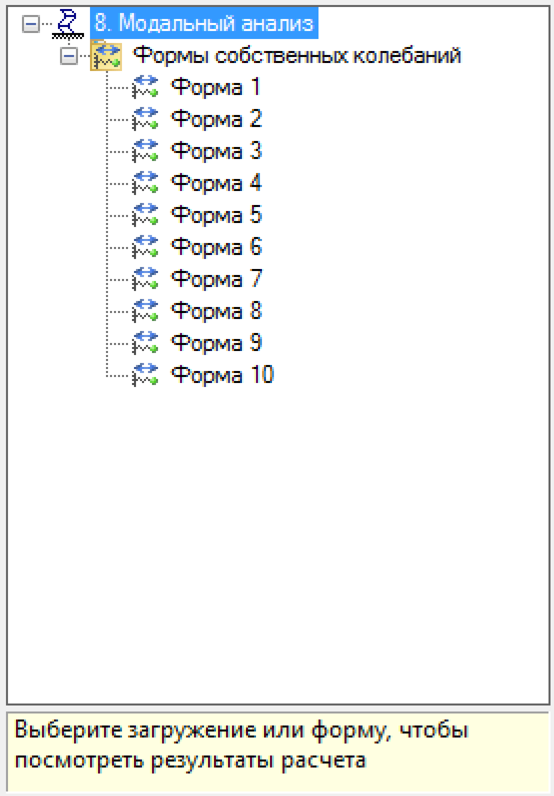


Рис. 5. Выбор формы колебаний

После выбора необходимой формы, включаем режим отображения **Деформированной схемы.**

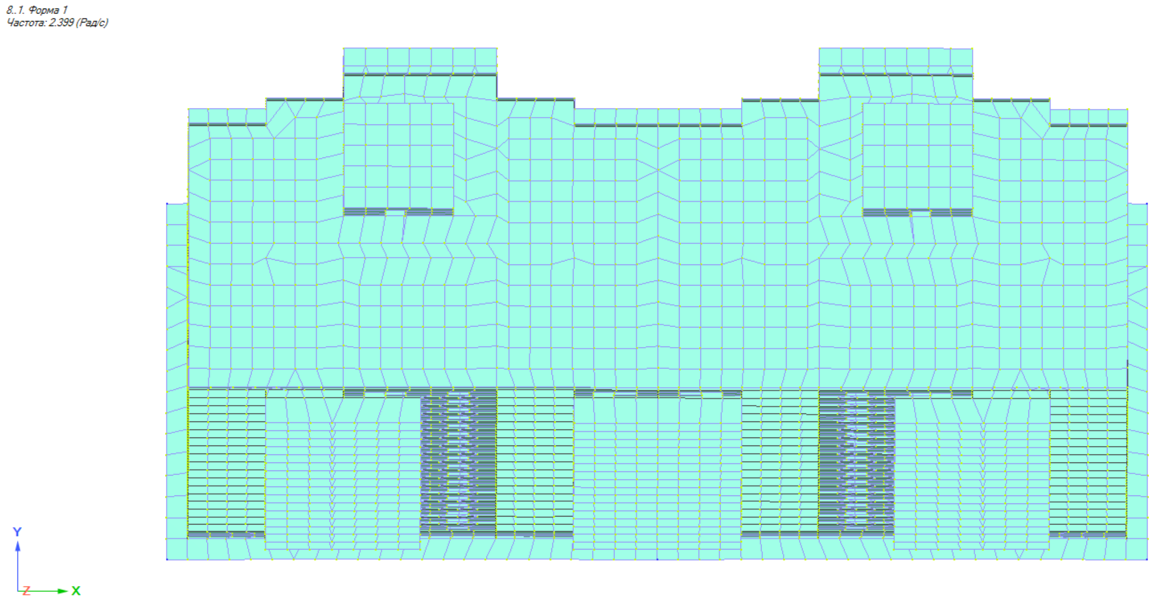


Рис. 6. 1-я форма колебаний.

Самый распространенный пример необходимости оценки частот – расчёт на пульсационные воздействия п. 11.1.8 [3], в котором расчётная формула зависит от значений первых частот собственных колебаний (в ПК ЛИРА выбор формулы производится автоматически, в зависимости от полученных частот).

Кроме этого, оценка форм колебаний важна, в первую очередь, для оценки равномерности распределения масс и жесткостей в модели, при выполнении расчётов на сейсмические воздействия.

Обратимся к п.5.3 [2]:

Сейсмические воздействия могут иметь любое направление в пространстве.

Для зданий и сооружений с простым конструктивно-планировочным решением допускается принимать расчетные сейсмические воздействия, действующие горизонтально в направлении их продольных и поперечных осей. Сейсмические воздействия в указанных направлениях можно учитывать раздельно.

При расчете сооружений со сложным конструктивно-планировочным решением следует учитывать наиболее опасные, с точки зрения максимальных значений сейсмической реакции сооружения или его частей, направления сейсмических воздействий.

Примечание - Конструктивно-планировочное решение зданий и сооружений считается простым, если выполняются все нижеперечисленные условия:

а) первая и вторая формы собственных колебаний сооружения не являются крутильными относительно вертикальной оси;

Выполнение данного требования говорит о том, что конструктивно-планировочные решения здания являются сейсмостойкими.

Отметим, что нет необходимости каждый раз делать модальный анализ.

При создании Сейсмических и Пульсационных загружений, данная процедура проводится автоматически, т.к. в нормативных документах заложены соответствующие методы разложения по собственным формам. Разница заключается лишь в том, что при задании таких воздействий указываются направляющие косинусы, и формы дополнительно раскладываются по выбранным направлениям (например, X и Y).

Использованная литература:

1. А.Н. Бирбраер. Расчёт конструкций на сейсмостойкость.
2. СП 14.13330.2014. Строительство в сейсмических районах СНиП II-7-81* (актуализированного СНиП II-7-81* "Строительство в сейсмических районах" (СП 14.13330.2011)) (с Изменением N 1).
3. СП 20.13330.2011 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*